Hans Rau-Bredow

Value at Risk, Normalverteilungshypothese und Extremwertverhalten

Dr. Hans Rau-Bredow, Privatdozent an der Universität Würzburg.

I. Einleitung

Die offensichtlich zunehmende Volatilität an den Finanzmärkten verbunden mit immer häufiger auftretenden extremen Ausschlägen sind der Grund für die wachsende Bedeutung des finanziellen Risikomanagements. In den letzten Jahren hat sich die Value at Risk-Methodik in diesem Zusammenhang als Standardverfahren für Finanzmarktakteure durchgesetzt[1]. Zum Beispiel informieren inzwischen nicht nur Banken, sondern auch Industrieunternehmen wie DaimlerChrysler in den Geschäftsberichten durch Angabe der Kennzahl Value at Risk über die Höhe der bestehenden finanzwirtschaftlichen Risiken.

Bei der nachfolgenden Einführung in die Value-at-Risk-Methodik wird zunächst herausgestellt, dass der Value at Risk unter der üblichen Normalverteilungshypothese einfach als ein bestimmtes Vielfaches der Portfolio-Standardabweichung gegeben ist. In diesem Fall ergeben sich außer in der Terminologie keine Neuerungen gegenüber den klassischen Portfoliomodellen in der Tradition von *Markowitz*. Tatsächlich ist es aber ein inzwischen nicht mehr umstrittenes Ergebnis der empirischen Finanzmarktforschung, dass sich die Normalverteilungshypothese nicht bestätigen lässt.

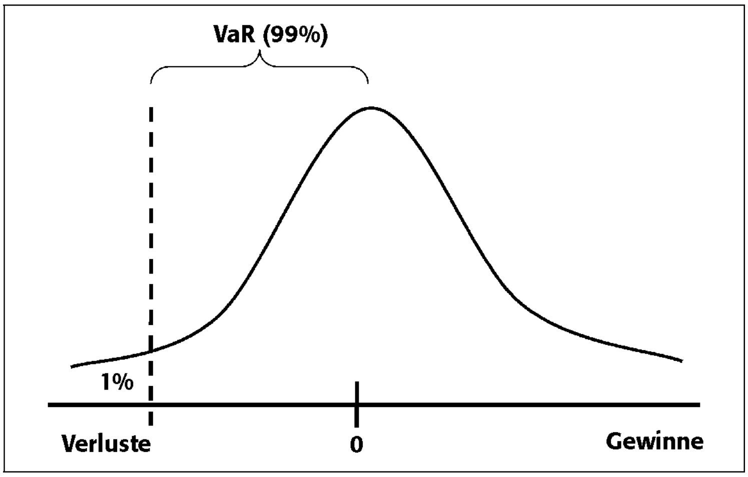
Für das Risikomanagement ist dabei insbesondere von Bedeutung, das extreme Verluste in der Realität der Finanzmärkte wesentlich häufiger vorkommen, als es einer Normalverteilung entsprechen würde. Ausgehend von einer Betrachtung der größten Tagesverluste des Dax im Zeitraum von 1959 bis 2002 wird im Folgenden deshalb erläutert, wie sich die Häufigkeit von extremen Ereignissen recht gut durch ein einfaches Power Law abschätzen lässt. Die Konsequenzen dieses Zusammenhangs für die Value-at-Risk-Methodik werden herausgestellt.

1) *Allgemein zum Value at Risk-Ansatz vgl. Jorion, Value at Risk, 2. Aufl. 2000; Rau-Bredow, Wirtschaftswissenschaftliches Studium 2001 S. 315-319.*

II. Definition des Value at Risk

Durch den Value at Risk soll die Höhe möglicher Verluste aufgrund von Kursschwankungen an den Finanzmärkten abgebildet werden. Da jede Verlustschätzung – zumindest solange kein Totalverlust prognostiziert wird – mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit durch ein noch ungünstigeres Ergebnis übertroffen werden kann, ist eine solche Prognose immer nur für ein bestimmtes Konfidenzniveau möglich. Der Value at Risk gibt deshalb den maximalen Verlust an, der bis zum Ende einer vorgegebenen Haltedauer (z.B. ein Handelstag) mit einer bestimmen Wahrscheinlichkeit (z.B. 99%) nicht übertroffen wird (vgl. Abb. 1). Dieser im Risiko stehende Betrag wird dann mit bestimmten statistischen Verfahren aus den in der Vergangenheit beobachteten Marktschwankungen geschätzt.

Abb. 1: Value at Risk für ein Konfidenzniveau von 99%



Üblicherweise betrachtet man in der Finanzmarkttheorie den Logarithmus der relativen Wertänderung

$$R_{T-1,T} = \ln\left(\frac{V_T}{V_{T-1}}\right) = \ln(V_T) - \ln(V_{T-1}) \qquad (1)$$

und unterstellt für diese Größe eine Normalverteilung[2]. Über mehrere Tage hinweg ergibt sich die Gesamtrendite

$$R_{0,T} = \ln(V_T) - \ln(V_0) = R_{0,1} + R_{1,2} + \ldots + R_{T-1,T} \qquad (2)$$

dann als Summe normalverteilter Tagesrenditen und unterliegt deshalb ebenfalls wieder einer Normalverteilung. Sind die Tagesrenditen identisch mit jeweils gleichem Erwartungswert μ und Varianz σ^2 verteilt (Stationaritätsannahme) und außerdem stochastisch unabhängig, dann gilt für Erwartungswert und Varianz der mehrperiodischen Renditen entsprechend $\mu\ (R_{0T}) = T\mu$ und $\sigma^2\ (R_{0T}) = T\sigma^2$. Die Größe $\frac{R_{0T} - T\mu}{\sqrt{T}\sigma}$ ist daher mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 standardnormalverteilt, sodass gilt[3]:

$$Prob\left(-\frac{R_{0T} - T\mu}{\sqrt{T}\sigma} < N^{-1}(p)\right) = p \qquad (3)$$

Dabei ist $N^{-1}(p)$ die Inverse der kumulierten Verteilungsfunktion $N(\,)$.

Bei einer kurzen Haltedauer von wenigen Handelstagen kann man die erwartete Rendite vernachlässigen[4]: $T\mu \approx 0$. Berücksichtigt man außerdem, dass bei hinreichend kleinen Kursschwankungen $R_{0T} = \ln\left(\frac{V_T}{V_0}\right) \approx \frac{V_T}{V_0} - 1$ gilt[5], dann führt eine entsprechende Substitution in Formel (3) zu:

$$\begin{aligned} &Prob\,(V_T > V_0 - VaR) = p \\ &\text{mit: } VaR = \sigma\,(V_T)\ N^{-1}\,(p) = V_0\sqrt{T}\sigma N^{-1}(p) \end{aligned} \qquad (4)$$

Der Value at Risk (VaR) als mögliche negative Abweichung vom aktuellen Portfoliowert V_0 ergibt sich als Produkt aus der sowohl vom Anlagevolumen V_0 als auch von der Haltedauer T abhängigen Standardabweichung des Portfolios $\sigma(_T) = V_0\sqrt{T}\,\sigma$ und dem Quantil $N^{-1}(p)$. Gängige Werte für das Quantil sind z.B. $N^{-1}\ (95\%) = 1{,}65$ und $N^{-1}\ (99\%) = 2{,}33$. Formel (4) besagt also, dass ein negativer Ausschlag von mehr als 1,65 bzw. 2,33 Standardabweichungen nur eine Wahrscheinlichkeit von 5% bzw. 1% hat.

Unter der Normalverteilungsannahme ist der Value at Risk nichts anderes als ein bestimmtes Vielfaches der jeweiligen Standardabweichung. Letztlich wird damit nur der Fachbegriff „Standardabweichung" durch den vielleicht anschaulicheren Begriff „Value at Risk" ersetzt. Die Standardabweichung eines sich linear aus mehreren Einzelpositionen zusammensetzenden Portfolios kann mit den aus dem Markowitz-Modell bekannten Verfahren mit Hilfe einer aus historischen Marktdaten geschätzten Kovarianzmatrix berechnet werden[6].

Zur Illustration sei ein breit diversifiziertes Aktienportfolio betrachtet, das weitgehend der Entwicklung des Dax folgt. Die Jahresvolatilität (Standardabweichung) des Dax beträgt ungefähr 25%, was bei insgesamt 255 Handelstagen im Jahr einer Tagesvolatilität von $\sigma = \frac{25\%}{\sqrt{255}} \approx 1{,}6\%$ entspricht. Gemäß Gleichung (4) beträgt der Value at Risk für eine Haltedauer von einem Handelstag $(T = 1)$ und einem Konfidenzniveau $p = 99\%$ dann ungefähr $1{,}6\% \cdot 2{,}33 = 3{,}7\%$ des aktuellen Depotwerts. Durchschnittlich alle hundert Tage muss also mit einem Tagesverlust von mehr als 3,7% gerechnet werden.

2) Für die absoluten Preisänderungen gilt also eine Lognormalverteilung.

3) Das hier vor dem Bruch gesetzte Minuszeichen spielt wegen der Symmetrie der Normalverteilung keine Rolle.

4) Eine erwartete Jahresrendite von 10% würde z.B. verteilt auf 255 Handelstage nur einer erwarteten Tagesrendite von etwa 0,04% entsprechen.

5) Für kleine Renditen kann also der Unterschied zwischen Lognormalverteilung und Normalverteilung vernachlässigt werden.

6) Ein Problem stellen Optionen dar, die nicht linear von einem bestimmten Underlying abhängig sind. Hier greift man auf Simulationsverfahren zurück. Die Monte Carlo-Simulation unterstellt regelmäßig für das jeweilige Underlying (nicht aber für den Kursverlauf der Option) eine Normalverteilung. Die historische Simulation ist dagegen ein nichtparametrisches Verfahren, das von keinen bestimmten Verteilungsannahmen ausgeht. Die Zufallsszenarien werden dabei aus historischen Kursbewegungen abgeleitet. Vgl. zu den Simulationsverfahren etwa Jorion, a.a.O. (Fn. 1), S. 193 ff., Rau-Bredow, a.a.O. (Fn. 1), S. 318.

III. Diskussion der Normalverteilungshypothese

1. Fat Tails und Volatilitätsschwankungen

Die empirische Verteilung der durch Gleichung (1) definierten Renditen weicht regelmäßig von der Normalverteilung ab. Typischerweise ist die empirische Verteilung stärker leptokurtisch, d.h. die Wölbung im Zentrum der Verteilung ist stärker ausgeprägt und die Flanken sind dicker (sog. Fat Tails). Kleine und sehr große Renditen haben eine größere und mittlere Renditen eine geringere Wahrscheinlichkeit als bei einer Normalverteilung. Für das Risikomanagement ist insbesondere die größere Wahrscheinlichkeit stark negativer Ausschläge von Bedeutung.

Zum Beispiel ergibt sich aus der Normalverteilung für eine negative Abweichung um mehr als 5 Standardabweichungen vom Mittelwert eine extrem kleine Wahrscheinlichkeit von ungefähr 1 zu 3 000 000, d.h. mit einem solchen Ereignis wäre nur alle 12 000 Jahre (zu je 250 Handelstagen) zu rechnen. Beim Dax entsprechen 5 Standardabweichungen bei einer geschätzten Tagesvolatilität von 1,6% einem Tagesverlust von 8%. Dieser Wert wurde zuletzt am Tag des Anschlags auf das World Trade Center am 11. 9. 2001 (Dax: –8,5%), davor beim Gorbatschow-Putsch am 19. 8. 1991 (Dax: –9,4%) und beim Börsencrash am 19. 10. 1987 (Dax: –9,4%) überschritten. Die Häufigkeit derartiger extremer Ausschläge steht also in einem offensichtlichen Widerspruch zu der sich aus der Normalverteilung ergebenden Wahrscheinlichkeitseinschätzung.

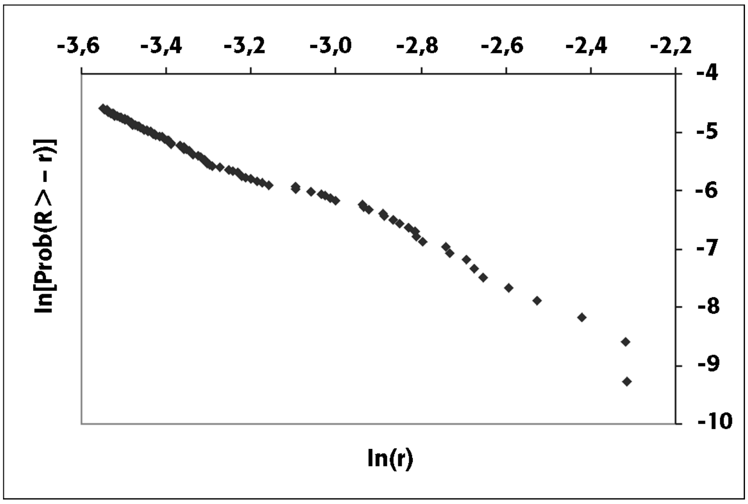
Auch für nicht ganz so extreme Ausschläge ist eine im Vergleich zur Normalverteilung tatsächlich größere Wahrscheinlichkeit zu beobachten. Deshalb liefern Schätzverfahren für den Value at Risk, die von der Normalverteilungsannahme ausgehen, bei einem entsprechend hohen Konfidenzniveau (ca. ≥ 99%) regelmäßig zu kleine Value at Risk-Kennziffern. In der Praxis wird dem vor allem durch ergänzendes Stresstesting begegnet, bei dem hypothetisch extreme Marktschwankungen unterstellt und die sich daraus ergebenden Auswirkungen auf das Portfolio analysiert werden.

Die Leptokurtosis der empirischen Verteilung kann durch Heteroskedastizität, also durch Volatilitätsschwankungen, erklärt werden. Die Volatilitäten fallen nicht nur für einzelne Aktien typischerweise jeweils unterschiedlich hoch aus, sondern sind darüber hinaus auch nicht im Zeitablauf stabil. Offensichtlich ist die Stationaritätsannahme in der Realität nicht erfüllt[7]. Dabei lässt sich regelmäßig eine Clusterbildung beobachten, d.h. die Zeitachse kann relativ einfach in unruhige Marktphasen mit großen Preisschwankungen und ruhigere Phasen mit relativ kleinen Schwankungen eingeteilt werden. Die Fat Tails erklären sich daraus, dass sich die Häufigkeit größerer Ausschläge in den unruhigen Phasen überproportional erhöht.

2. Power Law als alternatives Verteilungsgesetz

Es stellt sich die Frage nach einem alternativen Verteilungsgesetz, welches die Häufigkeit extremer Ausschläge möglicherweise besser beschreibt. Im Rahmen einer einfachen empirischen Untersuchung wurden dazu die Tagesrenditen des Dax im Zeitraum vom 30. 9. 1959 bis 5. 7. 2002 betrachtet (N = 10676 Werte) und der Größe nach geordnet[8]. Für die 107 schlechtesten Tagesrenditen[9] (= 1% des gesamten Stichprobenumfanges) zeigt Abb. 2 in doppelt logarithmischer Darstellung die empirisch ermittelte kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung *Prob (R < –r)* in Abhängigkeit von der Verlustschranke *r*.

Abb. 2: Doppelt logarithmische Darstellung der kumulierten Häufigkeitsverteilung von Dax-Tagesrenditen (30. 9. 1959 bis 5. 7. 2002)



Offensichtlich besteht ein nahezu linearer Zusammenhang[10], d.h. es gilt:

$$\ln[Prob(R<-r)] \approx \ln(b) - a\ln(r) \qquad (5)$$
$$\Leftrightarrow Prob(R<-r) \approx br^{-a}$$

Eine lineare Regression liefert $a = 3{,}066$ bei einem Bestimmtheitsmaß von 0,98.

Dass die Häufigkeit extremer Verluste regelmäßig durch ein derartiges Power Law[11] beschrieben werden kann, ist eine überraschend allgemeingültige, nicht nur für Aktienkurse, son-

7) Häufig wird dies in den üblichen statistischen Schätzverfahren für den Value at Risk dadurch berücksichtigt, dass neuere Marktdaten mit einem stärkeren Gewicht in die Berechnung eingehen als ältere Daten. Es wird also ein bestimmter Kompromiss zwischen der Relevanz der Daten und einer historisch möglichst weit zurückreichenden Datenbasis gewählt.

8) Der Dax wurde in Fortführung des Index der Börsenzeitung gestaltet. Seine historische Zeitreihe reicht bis 1959 zurück. Als Basis wurde der 30. 12. 1987 auf 1000 gesetzt.

9) Es handelt sich um Renditen von –2,88% und schlechter, d.h. –2,88% ist der aus dieser langen Zeitreihe geschätzte Value at Risk für ein Konfidenzniveau von 99%. Diese relativ geringe Risikoeinschätzung deutet auf eine geringere Volatilität des Aktienmarktes in den ersten Jahrzehnten des Betrachtungszeitraums hin.

10) Deutlich erkennbar ist allerdings das gleich zweimalige Vorkommen eines extremen Tagesverlustes von –9,4% (ln(r) ≈ –2,3) am 19. 8. 1991 und am 19. 10. 1987.

11) Das Power Law wird auch als Pareto-Verteilung bezeichnet. Vilfredo Pareto (1848-1923) glaubte damit die Einkommensverteilung in einer Gesellschaft beschreiben zu können. Auch für die Stärke von Erdbeben, die Größe von Städten, die Häufigkeit bestimmter Wörter oder die Besucherzahlen von Websites wird vielfach ein solches Power Law unterstellt.

Finanzmärkte

dern z.B. auch für Währungskurse und Warenpreise bestätigte Gesetzmäßigkeit in der Welt der Finanzmärkte[12)]. Der Tail Index a liegt dabei meistens in der Gegend um 3 und nimmt fast immer Werte zwischen 2 und 4 an. Je kleiner a ausfällt, desto stärker sind die Fat Tails ausgeprägt und desto höher ist die Wahrscheinlichkeit extremer Verluste. Die Momente, also die Erwartungswerte der potenzierten Zufallsrealisationen, existieren jeweils nur für Potenzen echt kleiner als a. Insbesondere wird für einen Tail Index $a \leq 2$ die Varianz unendlich groß.

Zur Illustration des Power Laws bietet sich folgende Umformung an:

$$Prob\,(R < -r) = k^a Prob\,\,(R < -kr) \tag{6}$$

In Fortführung des Beispiels für den Dax aus Abschn. II. lässt sich aus $Prob\ (R < -3{,}7\%) = 1\%$ die Wahrscheinlichkeit etwa für einen Tagesverlust von mehr als 8% (5 Standardabweichungen) dann wie folgt abschätzen:

$$Prob\,(R <= 8\,\%) = \left(\frac{3{,}7}{8}\right)^{3{,}066} Prob\left(R < -\frac{3{,}7}{8}\cdot 8\,\%\right) = 0{,}094\,\%$$

Ungefähr alle 4 Jahre (zu je 250 Handelstagen) muss demnach mit einem Tagesverlust von mehr als 8% gerechnet werden.

Eine naheliegende Anwendung des durch Formel (6) gegebenen Zusammenhangs ist die theoretische Fundierung der von der Bankenaufsicht angewendeten Zusatzfaktoren, mit denen der Value at Risk zu multiplizieren ist, um die zum Ausgleich von Marktrisiken notwendige Eigenkapitalausstattung zu berechnen[13)]. Die Höhe eines solchen Zusatzfaktors bestimmt die entsprechend geringere Wahrscheinlichkeit, mit der das aufsichtsrechtliche Eigenkapital durch eventuelle Kursverluste im Handelsbestand aufgebraucht wird. Mit Hilfe eines Power Laws kann diese Ruinwahrscheinlichkeit konkret geschätzt werden[14)].

3. Scaling und Selbstähnlichkeit

Die bisherige Untersuchung bezog sich ausschließlich auf Tagesrenditen. In der gleichen Weise könnten aber sowohl Daten mit noch höherer Frequenz, also Schwankungen innerhalb eines Handelstags, als auch längerfristige Wochen- bzw. Monatsrenditen untersucht werden. Eine naheliegende Frage ist, inwiefern dabei bestimmte Gesetzmäßigkeiten unabhängig von der Skalierung der Zeitachse sind, also ob das Power Law für Intraday-Renditen oder für Renditen über mehrere Tage ebenfalls gültig ist. Eine solche Skaleninvarianz oder Selbstähnlichkeit, bei der sich ein für kurze Zeiträume erkennbares Muster bei der Betrachtung längerfristiger Renditen immer wieder entsprechend wiederholt, wurde zuerst von *Mandelbrot*[15)] in einer Untersuchung über Baumwollpreise konstatiert.

Selbstähnlichkeit setzt wegen Formel (2) voraus, dass die Summe von Zufallsvariablen (hier der einperiodischen Renditen $R_{T-1,T}$) wieder dem gleichen Verteilungsgesetz unterliegt wie die einzelnen Summanden. Verteilungen, die diese Eigenschaft erfüllen, heißen Lévy-stabil[16)]. Bei einer Lévy-stabilen Verteilung handelt es sich entweder um den herkömmlichen Fall einer Normalverteilung, oder es liegt eine Verteilung vor, deren Flanken sich approximativ durch ein Power Law mit $0 < a < 2$ beschreiben lassen. Geht man vereinfachend von einem Mittelwert $\mu = 0$ aus[17)], dann unterliegen die wie folgt standardisierten Renditen

$$\frac{R_{0,1} + \ldots + R_{T-1;T}}{\sqrt[a]{T}} = \frac{R_{0,T}}{\sqrt[a]{T}} \tag{7}$$

bei Lévy-Stabilität unabhängig vom Anlagehorizont T immer genau dem selben Verteilungsgesetz. Hieraus folgt insbesondere, dass der mögliche Verlust bei einer Haltedauer von T Tagen sich wie folgt aus dem Value at Risk für einen Handelstag berechnet:

$$VaR\,(T\ Tage) = \sqrt[a]{T}\ \ VaR\,(1\,Tag) \tag{8}$$

$\sqrt[a]{T}$ ist demnach der Scaling-Faktor, um Renditen für unterschiedliche Anlagehorizonte vergleichbar zu machen. Es handelt sich um eine offensichtliche Verallgemeinerung der Quadratwurzel-T Formel, mit der gemäß Formel (4) bei Normalverteilung ($a = 2$) eine Umrechnung für verschiedene Zeithorizonte erfolgt.

Die praktische Bedeutung dieses Ergebnisses wird jedoch durch folgenden Zusammenhang eingeschränkt: Allgemein konvergiert die Verteilung der Summe stochastisch unabhängiger, approximativ gemäß einem Power Law verteilter Zufallsgrößen gegen eine bestimmte Lévy-stabile Verteilung. Gilt für den Tail-Index der Summanden $a < 2$, dann ist dies auch der

12) *Für empirische Untersuchungen zum Power Law vgl. Pagan, Journal of Empirical Finance 1996 S. 15-102, Plerou et al., Physical Review E 1999 S. 6519-6529, Gopikirishnan et al., Physical Review E 1999 S. 5305-5316, Franke/Härdle/Hafner, Einführung in die Statistik der Finanzmärkte, 2001, Abschn. 13.1. Ein besonders anschauliches Beispiel ist die fast vollständig ab dem Jahr 1609 dokumentierte Entwicklung des Wechselkurses zwischen holländischen Gulden und britischen Pfund (vermutlich die historisch am weitesten zurückreichende verfügbare Finanzmarktdatenreihe), vgl. de Vries, Tinbergen Magazine 4, Fall 2001 S. 3-6 (Download: www.tinbergen.nl/magazine).*

13) *Verfügt die Bank über eine Genehmigung des Bundesaufsichtsamts für das Kreditwesen (BaKred, jetzt: Bundesaufsichtsamt für Finanzdienstleistungen [BAFin]) zur Anwendung des Modellverfahrens, dann wird der bankintern für ein Konfidenzniveau von 99% und eine Haltedauer von 10 Handelstagen errechnete Value at Risk mit einem von der Aufsicht vorgegebenen Faktor ≥3 multipliziert und so das aufsichtsrechtliche Mindesteigenkapital für Marktrisiken bestimmt. Die genaue Höhe des Multiplikationsfaktors ist vor allem von der Qualität des internen Risikomodells der Bank abhängig. Die Einzelheiten sind im Grundsatz I über die Eigenmittel der Institute, §§ 32 ff. KWG, geregelt.*

14) *Vgl. in diesem Zusammenhang z.B. Danielsson et al., The Cost of Conservatism: Extreme Value Returns, Value-at-Risk, and the Basle Multiplication Factor 1998 (Download: www.riskresearch.org/papers).*

15) *Vgl. Mandelbrot, Journal of Business 1963 S. 394-419.*

16) *Vgl. zur Lévy-Stabilität Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications Vol. II 1966, Gopikirishnan et al., a.a.O. (Fn. 12), S. 5313 f., Focardi, Fat Tails, Scaling and Stable Laws: A Critical Look at Modeling Extremal Events in Economic and Financial Phenomena, Discussion Paper 2001-02 (Download: www.theintertekgroup.com/discussionpapers.html).*

17) *Ansonsten gilt eine entsprechende Aussage für die Abweichungen vom Mittelwert bzw. Lageparameter.*

Tail Index der Grenzverteilung. Im Fall von $a \geq 2$ erfolgt eine Konvergenz gegen die Normalverteilung, deren Flanken sich nicht approximativ durch ein Power Law beschreiben lassen. Wie erwähnt ist nun aber $a \geq 2$ der empirisch relevante Fall. In der Realität der Finanzmärkte sind die Fat Tails offensichtlich so gering ausgeprägt, dass man noch endliche Varianzen bzw. Volatilitäten erhält und deshalb der herkömmliche zentrale Grenzwertsatz zur Anwendung kommt[18]. Tatsächlich scheint für längerfristige Renditen über einen Zeitraum von mehr als ca. vier Handelstagen eine allerdings langsame Konvergenz zur Normalverteilung beobachtbar zu sein[19].

IV. Zusammenfassung

Unter der klassischen Normalverteilungsannahme verbirgt sich hinter dem Value at Risk zunächst nichts anderes als ein bestimmtes Vielfaches der Standardabweichung. Dies ergibt sich einfach daraus, dass bei Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit für einen negativen Ausschlag von z.B. mehr als 2,33 bzw. 1,65 Standardabweichungen genau 1% bzw. 5% beträgt. Problematisch für das Risikomanagement ist jedoch die Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeit sehr hoher Verluste durch die Normalverteilung mitunter erheblich unterschätzt wird.

Rein auf der Normalverteilungsannahme beruhende Schätzverfahren werden für den Value at Risk daher regelmäßig zu niedrige Kennziffern liefern. Eine bessere Beschreibung der Häufigkeit extremer Verluste ist wie gezeigt mit Hilfe eines relativ einfachen Power Laws möglich. Dieser Zusammenhang lässt sich unmittelbar für die Value-at-Risk-Methodik fruchtbar machen. Da trotz der Fat Tails in der Realität offensichtlich noch endliche Varianzen vorliegen, kommt jedoch für Renditen über einen längeren Zeithorizont der zentrale Grenzwertsatz zur Anwendung, sodass hier eine Konvergenz gegen die Normalverteilung zu erwarten ist.

18) *Ein Sonderfall ist ein Tail Index $\alpha = 2$, der trotz bereits unendlich großer Varianz auch noch im Anziehungsbereich der Normalverteilung liegt.*

19) *Vgl. Gopikirishnan et al., a.a.O. (Fn. 12).*

Finanzmärkte