

Termingeschäfte und Derivate

Hans Rau-Bredow

hans.rau-bredow@uni-wuerzburg.de

Termine:

Montag, 6. März 2023 ab 11.15 Uhr

Dienstag, 7. März 2023 ab 10.15 Uhr

Freitag, 10. März 2023 ab 11.15

Gliederung

Montag:

1. Futures

Dienstag:

2. Optionen

**3. Ausblick: Andere Derivate, insb.
Swaps**

Freitag:

Wiederholung und Ergänzungen

Basisliteratur

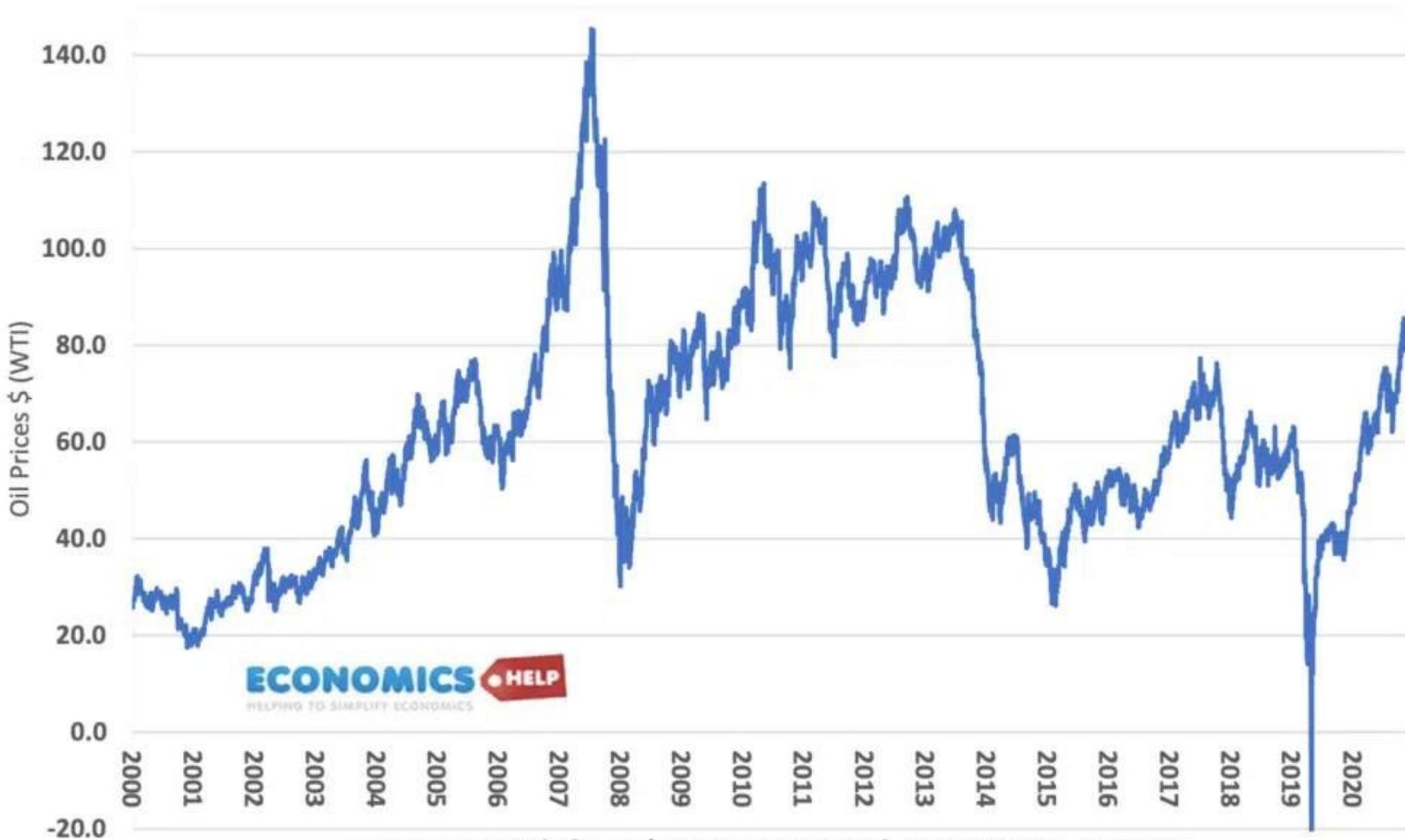
Hull, John: Optionen, Futures und andere Derivate (Options, Futures and Other Derivatives)

(versch. Auflagen, für diesen Foliensatz wurde die deutsche Ausgabe von 2015 (9. Auflage) benutzt, das Inhaltsverzeichnis dieser Auflage: <http://d-nb.info/1075875099/04>↑)

Rau-Bredow, Hans (2022): Contango and Backwardation in Arbitrage-Free Futures-Markets

online: <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/111688>

Oil Prices (WTI)



ECONOMICS 
HELPING TO SIMPLIFY ECONOMICS

Ölpreis Januar 2008

Spotpreis:

40 \$ / Barrel

12-Monats Future:

60 \$ / Barrel (Super Contango)

Risikoloser Arbitragegewinn:

- kaufe physisches Öl zu 40 \$ / Barrel**
- miete Lagerflächen für 12 Monate**
- schließe Termingeschäft ab, das Öl in 12 Monaten zum
Festpreis von 60 \$ / Barrel zu verkaufen**
- Gewinn = 20 \$ minus Lager- und Zinskosten (sog. Cost of
Carry)**

- in effizienten Kapitalmärkten gibt es aber keinen „Free Lunch“, derartige Arbitragemöglichkeiten werden daher nach kurzer Zeit wieder verschwinden.**
- die Handelsaktivitäten werden zum Anstieg des Spotpreises und zu einem fallenden Futurekurs führen, bis die Differenz genau den Lager- und Zinskosten entspricht.**
- mit derartigen Überlegungen können also Aussagen zum Verhältnis von Spotpreis und Futurekurs gemacht werden (insb. ohne Rückgriff auf individuelle Risikopräferenzen)**

Thema dieser Vorlesung:

- Funktionsweise von Futures und Optionen

- arbitragefreie Bewertung von Futures und Optionen

1. Futures

1. Einführung

2. Handel mit Futures, insbesondere Margins und tägliche Abrechnung

3. Arbitragefreie Bewertung von Futures: Cost of Carry, Carry Trades und Reverse Carry Trades

4. Contango vs. Backwardation: Die Rolle der Convenience Yield

Termingeschäft (Forward/Future)

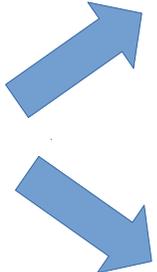
$t = 0$ (heute)

A und B vereinbaren die Lieferung eines Wirtschaftsgutes in $t = T$ (z.B. in 12 Monaten) zum Festpreis F_0 (z.B. $F_0 = 60$ \$).

$t = T$ (z.B. in 12 Monaten)

Das Wirtschaftsgut wird geliefert und $F_0 = 60$ \$ überwiesen.

Forwards vs. Futures



**Forwards: Außerbörslich (over the counter (OTC))
gehandelte Terminkontrakte, nicht anonym**

**Futures: Börsengehandelte Terminkontrakte
(standardisiert, z.B. Fälligkeiten am 3. Freitag im
März/Juni/September/Dezember), anonym**

***G20 Zielvereinbarung Pittsburg von 2009: Kein OTC-Handel
für standardisierte Derivate, zentrales Clearing.***

Agrar-Terminmarktnotierungen vom 26. März 2013

Weizen MATIF €/t

| | | |
|--------|--------|--|
| Mai 13 | 243,25 | |
| Nov 13 | 214,75 | |
| Jan 14 | 213,75 | |
| Mrz 14 | 213,00 | |

Braugerste MATIF €/t

| | | |
|--------|--------|---|
| Mrz 13 | 246,00 | |
| Mai 13 | 250,00 | - |
| Nov 13 | 252,00 | - |
| Jan 14 | 244,00 | - |

MATIF = Marché de Terme International de France

Contango: Futurepreis F_0 ist größer als Spotpreis S_0

Backwardation: Futurepreis F_0 ist kleiner als Spotpreis S_0

Bestandteile von Futures-Kontrakten

- Spezifizierung der Qualität des Wirtschaftsgutes (z.B. Öl: Schwefelgehalt, relative Dichte, z.B. Weizen: Feuchtigkeit, Bruchkorn, Auswuchs, Besatz)**
- Lieferort**
- Erfüllung: Physische Lieferung oder Barausgleich**
- Sicherheiten (Margins)**

Kontraktsspezifikationen Chicago Mercantile Exchange

(www.cmegroup.com)

| | |
|-----------------------------------|---|
| Öl: | <u>Physische Lieferung</u> |
| Weizen: | Physische Lieferung |
| Gold: | Physische Lieferung |
| S&P 500 (Aktienindex): | Barausgleich |
| Bitcoin: | Barausgleich (Referenzpreis: Durchschnittlicher Handelspreis an mehreren Kryptobörsen) |

Barausgleich (cash settlement)

- ein Bauer hat im Januar ein Termingeschäft über den Verkauf (short) von einer Tonne Weizen im September zum Festpreis von $F_0 = 200 \text{ €/t}$ abgeschlossen.**
- im September ist der Weizenpreis $S_T = 193 \text{ €/t}$**
- bei Barausgleich würde der Bauer dann $F_0 - S_0 = 7 \text{ €}$ aus dem Termingeschäft erhalten zusätzlich zum Verkaufserlös von 193 €/t (insgesamt 200 €/t ; bei einem Weizenpreis von 206 € müsste er dagegen 6 € an seinen Kontrahenten zahlen)**

Physische Lieferung

- Selbst wenn in den Kontraktbedingungen vorgesehen, ist physische Lieferung ein seltenes Ereignis. Die meisten Kontrakte werden vor Fälligkeit durch entsprechendes Gegengeschäft geschlossen (vgl. Hull Business Snapshot 2.1).**
- Das bedeutet nicht zwingend, dass es sich immer um reine Spekulationsgeschäfte handelt. Der Kontrakt könnte trotzdem zu Hedging-Zwecken abgeschlossen worden sein.**

Vorzeitiges Closing von Futures durch Gegengeschäft

**$t = 0$ Verkauf eines Futures auf Weizen zu $F_0 = 200$ €
(Eröffnung (open) einer short Position).**

**$t < T$ Kauf eines Futures zu $F_t = 193$ € (Schließung (close)
der short Position durch eine gegenläufige long Position).**

**=> Am Fälligkeitstag heben sich Kauf zu 193 € und Verkauf
zu 200 € gegenseitig auf und ergeben einen Gewinn von 7 €.**

Negativpreise für Öl (WTI) im April 2020

- im April 2020 wurden für den im folgenden Mai fälligen Öl-Future negative Preise notiert (in der Spitze minus 40 \$), [mehr dazu](#)↑ (später fällige Futures notierten durchgängig im Plus).
- Hintergrund waren die durch die Covid19-Pandemie ausgelösten globalen Einschränkungen der wirtschaftlichen Aktivitäten.
- der extreme Nachfrageschock führte zu einem Überangebot an Öl und zu knapp werdenden Lagerkapazitäten.

- der entsprechende Öl-Kontrakt sah physische Lieferung im Mai 2020 vor. Inhaber einer long-Position mussten den Kontrakt also rechtzeitig (letzter Handelstag 21. April 2020) durch Verkauf schließen, um eine physische Lieferung und schwer kalkulierbare Lagerkosten zu vermeiden ([link zu den Kontraktbedingungen](#)↑).

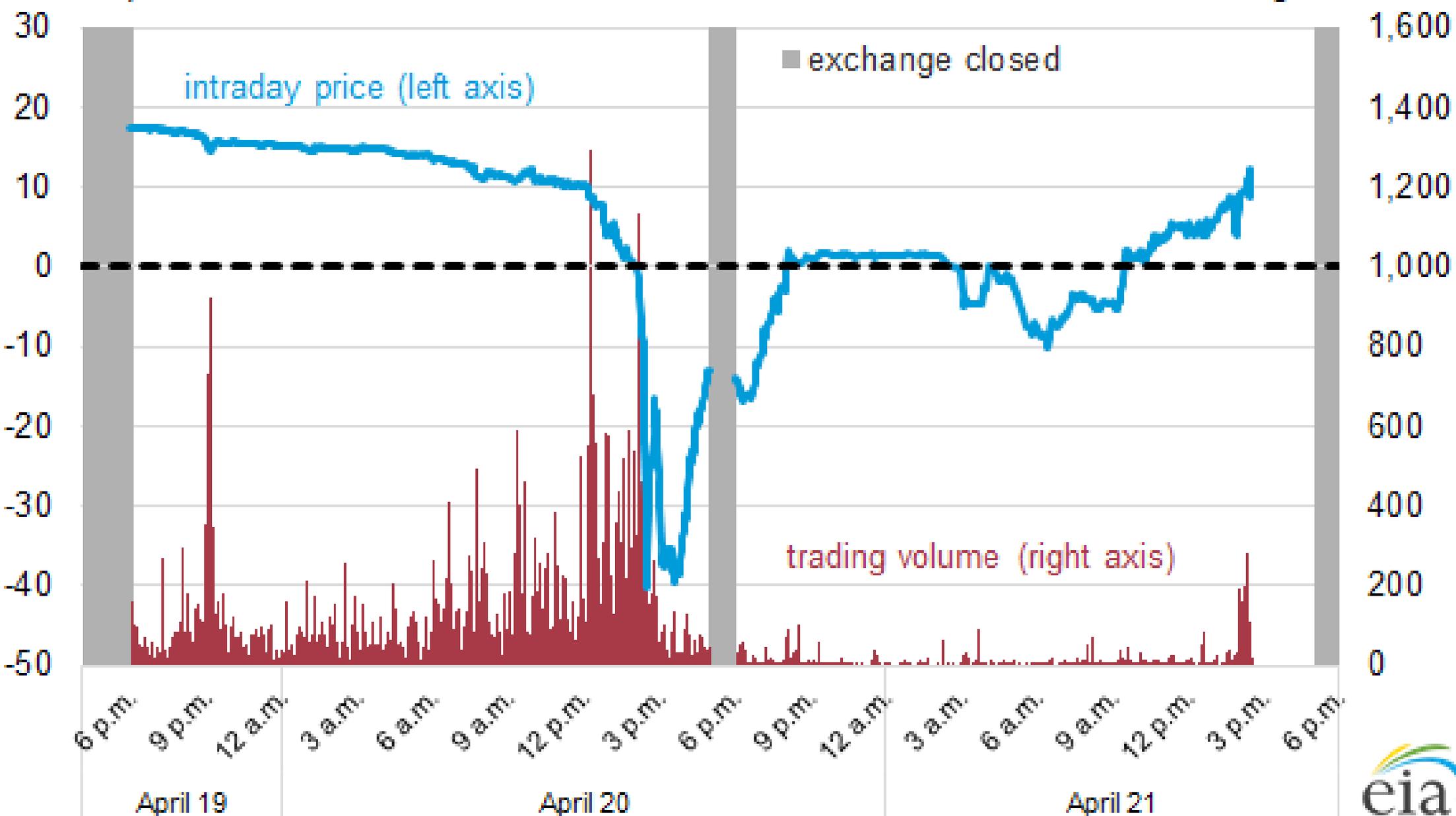
- wer zu -40 \$ einen Future kauft (Aufbau einer long-Position), erhält also Geld dafür, dass er sich verpflichtet, physisches Öl abzunehmen.

- Problem ist offensichtlich, dass Öl aus Gründen des Umweltschutzes nicht einfach irgendwo entsorgt werden kann. Dagegen sind negative Preise z.B. für Weizen oder Gold schwer vorstellbar. Bei Strom-Futures kommen aber negative Preise gelegentlich vor.

Figure 1. May 2020 West Texas Intermediate futures contract

dollars per barrel

trading volume



Source: U.S. Energy Information Administration based on data from CME Group and Bloomberg, L.P.



2. Handel mit Futures, insbesondere Margins und tägliche Abrechnung

Geschichte Termingeschäfte

- historisch zuerst für Agrarprodukte**
- Termingeschäfte bereits in der Antike?**
- Tulpenfutures in den Niederlande 17 Jh.**
- Reis-Börse in Osaka/Japan geründet 1697 (existierte bis 1939) wird oft als erste organisierte Terminbörse genannt**
- Einführung von Futures auf Rohöl in 1983**

Volumen des Derivatemarktes

- Eine häufig zitierte Zahl beziffert den weltweiten Handel mit Derivaten auf 700 Billionen US-Dollar (wie gemessen?) (zum Vergleich: BIP USA \approx 23 Billionen US-Dollar)
- Laut [Bank für Internationalen Zahlungsausgleich \(BIZ\)](#) betrug Ende Juni 2022 der nominale Wert des globalen OTC-Marktes 632 Billionen US-Dollar und der Bruttomarktwert 18,3 Billionen US-Dollar.
- Umsatz Ölfuture ca. 1.000 Mrd Barrel/Tag, Fördermenge/Verbrauch ca. 100 Mio. Barrel/Tag (Faktor 10.000)

Höhere Volatilität durch Derivate?

- Bei Barausgleich keine direkten(!) Einflüsse auf den Kassakurs (Nullsummen-Spiel)
- Immer umfangreichere Termingeschäfte werden für Schwankungen und Preissteigerungen etwa auf den Getreide- oder Ölmärkten verantwortlich gemacht.
- Beispiel: Futures auf Zwiebeln in USA seit 1958 bis heute verboten www.die-bank.de/news/lehren-aus-dem-onions-futures-act-von-1958-2760/
- Gefahr der Marktmanipulation durch große Player ("Cornering" eines Marktes, z.B. Aufkauf von Silber durch die Gebrüder Hunt in den 1970er Jahren)

Spekulation: Fluch oder Segen?

- Spekulation als dezentrales Preisentdeckungsverfahren, bei dem die Preise Informationen über Ressourcen - knappheiten liefern, die einem zentralen Planer nie vollständig verfügbar sein können (F.A. Hayek 1899-1992).**
- Andererseits: Herdenverhalten und irrationale Blasenbildung**

Absicherungsstrategien mit Termingeschäften

- Fluggesellschaften, Raffinerien, Getreidemühlen, Goldverarbeiter wollen sich gegen steigende Einkaufspreise absichern (Kauf von Futures = long Position)**
- Ölproduzenten, Landwirte, Goldminen wollen sich gegen fallende Preise absichern (Verkauf von Futures = short Position)**
- Absicherung gegen Währungsschwankungen (z.B. Einnahmen in Fremdwährung, Ausgaben in Euro bei exportierenden Unternehmen)**

Hedging-Strategien in der Praxis

- **Barrick Gold, weltgrößter Goldproduzent, hat sich lange Jahre gegen fallende Goldpreise abgesichert. Als der Goldpreis ab den 2000er Jahren stieg, wurde das Hedging auf Druck der Aktionäre aufgegeben vgl. [Ahn 2018 S.95 ↑](#)**
- **Der Mineralölkonzern Exxon Mobil hat in der Vergangenheit weitgehend auf Hedging verzichtet, da genügend Cash Reserven vorhanden waren, um mögliche Verluste auszugleichen Quelle: [Bloomberg 2015 ↑](#)**
- **Mexiko ist bekannt dafür, seine Öleinnahmen auf den Terminmärkten abzusichern. Quelle: [Reuters 2019 ↑](#)**

Theoretische Überlegungen zum Hedging

- aus dem Irrelevanztheorem von Modigliani/Miller folgt, dass Anleger ihr Risikoexposure unabhängig von den Finanzierungs- und Hedgingentscheidungen der Unternehmen bestimmen können. (Der Aktionär einer Goldmine könnte z.B. auch selber Goldfutures verkaufen.)**
- diese Aussage setzt allerdings reibungslos funktionierende Kapitalmärkte ohne Transaktionskosten voraus.**

Vorteile des Hedging auf Unternehmensebene

- Kostenverteilung der Unternehmen beim Abschluss von Termingeschäften**
- bei eingeschränkten steuerlichen Verlustverrechnungsmöglichkeiten ist die Glättung der Jahresgewinne durch Hedging mit Steuervorteilen verbunden**
- geringere Schwankungen der Gewinne ermöglicht die Innenfinanzierung von antizyklischen Investitionen**
- geringes Insolvenzrisiko beim Hedging möglicher Verluste**

Nachteile des Hedging auf Unternehmensebene

- die Anteilseigner können ihr Portfolio einfacher diversifizieren als ein einzelnes Unternehmen**
- Unternehmen sollen sich primär auf das operative Geschäft konzentrieren.**
- Können alle Veränderungen der Einkaufspreise immer an die Kunden weitergegeben werden, dann ist kein Hedging notwendig und kann sogar zu vermeidbaren Verlusten führen (vgl. dazu Hull 3.2).**

- die Aktivitäten sehr großer Marktakteure können die Terminpreise beeinflussen, d.h. es ist fraglich ob eine Absicherung zu fairen Konditionen möglich ist.

- schließlich werden Verluste aus Hedginggeschäften von den Anteilseignern anders wahrgenommen als Ausgaben für eine Versicherung, obwohl die ökonomische Funktion die gleiche ist.

KEVIN PAUL JEREMY ZACHARY PENN
SPACEY BETTANY IRONS QUINTO BADGLEY
SIMON MARY DEMI STANLEY
BAKER McDONNELL AND MOORE AND TUCCI

MARGIN CALL



"THE BEST WALL STREET FILM YET"



Margin Calls

- Damit die Handelsteilnehmer jederzeit ihren Verpflichtungen nachkommen können, verlangen die Terminbörsen die Stellung ausreichend hoher Sicherheiten (Margin Requirements).**
- Im Fall von Verlusten sind die Handelsteilnehmer zu Nachschüssen verpflichtet (Margin Calls), andernfalls wird die Position unmittelbar liquidiert**

Der Mechanismus der täglichen Abrechnung (Hull 2.4)

- Kauf von 2 Gold Future Kontrakten (1 Kontrakt = 100 Unzen) zum Kurs von 1.250 \$ je Feinunze.**
- Initial Margin = 6.000 \$ je Kontrakt => insgesamt 12.000 \$ müssen mindestens auf dem Margin-Konto sein**
- Maintenance Margin 4.500 \$ je Kontrakt => Margin Call, falls Saldo < 9.000 \$**
- der tägliche Gewinn/Verlust ergibt sich aus der Differenz des Settlement Preises zum Vortag mal Kontraktwert 100 mal 2 Kontrakte**

| <i>Day</i> | <i>Trade price (\$)</i> | <i>Settlement price (\$)</i> | <i>Daily gain (\$)</i> | <i>Cumulative gain (\$)</i> | <i>Margin account balance (\$)</i> | <i>Margin call (\$)</i> |
|------------|-------------------------|------------------------------|------------------------|-----------------------------|------------------------------------|-------------------------|
| 1 | 1,250.00 | | | | 12,000 | |
| 1 | | 1,241.00 | -1,800 | -1,800 | 10,200 | |
| 2 | | 1,238.30 | -540 | -2,340 | 9,660 | |
| 3 | | 1,244.60 | 1,260 | -1,080 | 10,920 | |
| 4 | | 1,241.30 | -660 | -1,740 | 10,260 | |
| 5 | | 1,240.10 | -240 | -1,980 | 10,020 | |
| 6 | | 1,236.20 | -780 | -2,760 | 9,240 | |
| 7 | | 1,229.90 | -1,260 | -4,020 | 7,980 | 4,020 |
| 8 | | 1,230.80 | 180 | -3,840 | 12,180 | |
| 9 | | 1,225.40 | -1,080 | -4,920 | 11,100 | |
| 10 | | 1,228.10 | 540 | -4,380 | 11,640 | |
| 11 | | 1,211.00 | -3,420 | -7,800 | 8,220 | 3,780 |
| 12 | | 1,211.00 | 0 | -7,800 | 12,000 | |
| 13 | | 1,214.30 | 660 | -7,140 | 12,660 | |
| 14 | | 1,216.10 | 360 | -6,780 | 13,020 | |
| 15 | | 1,223.00 | 1,380 | -5,400 | 14,400 | |
| 16 | 1,226.90 | | 780 | -4,620 | 15,180 | |

Kontrollrechnung

- **Einstiegskurs 1.250 \$ - Ausstiegskurs 1.226,90 \$ = 23,10 \$**
- **Verlust: 23,10 \$ * Kontraktwert 100 * 2 Kontrakte = 4.620 \$**
- **Gesamte Einzahlungen auf das Margin-Konto:
12.000 \$ + 4.020 \$ (Margin Call) + 3.780 \$ (MarginCall) = 19.800 \$**
- **Schlussaldo Margin-Konto: 15.180 \$**
- **Verlust: 19.800 \$ - 15.180 \$ = 4.620 \$ ok**

Wirken Margin-Calls krisenverschärfend?

- Margin-Calls können zu einem plötzlichen sehr hohen Liquiditätsbedarf führen und zwar auch dann, wenn die Derivate rein zu Absicherungszwecken gehalten werden.**
- Gashändler sichern sich z.B. gegen fallende Gaspreise ab, indem sie Gas auf Termin verkaufen (short). 2022 sind die Gaspreise wegen des Ukraine-Krieges aber stark gestiegen.**
- Im Herbst 2022 musste die Bank of England die Notkäufe am Anleihemarkt mehrfach ausweiten, da steigende Zinsen zu Margin-Calls führten.**

Stimmen Forward- und Future-Kurse überein?

- börsengehandelte Futures werden täglich, OTC Forward Kontrakte dagegen erst bei Fälligkeit abgerechnet.**
- es ergibt sich ein Zinsvor- oder -nachteil, wenn Gewinne bzw. Verluste zeitlich früher verbucht werden**
- sind Gewinne und Verlust gleich wahrscheinlich, dann werden sich die Zinsvor- und -nachteile weitgehend gegenseitig aufheben; man kann daher unterstellen (vgl. Hull 5.8 und Business Snapshot 5.2):**

Future Preis \approx Forward Preis

3. Arbitragefreie Bewertung von Futures: Cost of Carry, Carry Trades und Reverse Carry Trades

Carry Trade (dividendenlose Aktie)

- Aktienkurs $S_0 = 40 \text{ €}$,
- 3-Monats-Future $F_0 = 43 \text{ €}$,
- Zins $i = 4\%$ (1% pro Quartal)

Aktion heute ($t = 0$)

- Kreditaufnahme 40 €
- Aktienkauf zu $S_0 = 40 \text{ €}$
- Kauf eines 3-Monats-Future mit $F_0 = 43 \text{ €}$

Aktion in 3 Monaten ($t = T$)

- Future wird fällig, Verkauf der Aktie zu $F_0 = 43 \text{ €}$
- von dem Erlös werden 40,40 € (40 € + 1%) für die Kreditrückzahlung verwendet

=> risikoloser Gewinn durch "Carry Trade": 2,60 €

Für den Gewinn p aus einem Carry Trade gilt:

$$p = F_0 - S_0 (1 + i)^T$$

In arbitragefreien Märkten sind Carry Trades nicht profitabel. Aus $p \leq 0$ folgt:

$$F_0 \leq S_0 (1 + i)^T$$

- Häufig wird mit der Annahme gearbeitet, dass die Zinsen nicht zu diskreten Zeitpunkten (monatlich, quartalsweise, jährlich) gezahlt werden, sondern ein kontinuierlicher, ununterbrochener Zufluss unterstellt (vgl. Hull 4.2).
- In der Konsequenz ist dann der Aufzinsungsfaktor $(1 + i)^T$ durch den Term e^{rT} zu ersetzen, mit r = stetiger Zins und Eulersche Zahl $e = 2,718... :$

$$F_0 \leq S_0 e^{rT}$$

Futures auf Einkommen generierende Assets

- es sei nun angenommen, dass das entsprechende Wirtschaftsgut Einkommen generiert (z.B. Dividenden)**
- wird dieses Einkommen verzinslich angelegt, dann erhöht es den Profit aus dem Carry Trade und führt somit zu einer niedrigeren oberen Schranke für den Futureskurs F_0 .**

- alternativ kann man annehmen, dass die Erträge kontinuierlich reinvestiert werden.
- bei einer Rendite q sind dann pro ursprünglichem Gut am Ende der Laufzeit e^{qT} Güter im Portfolio.
- wird antizipierend in $t = 0$ eine entsprechend höhere Anzahl an Futures verkauft, dann ist der Profit aus dem Carry Trade:

$$p = F_0 e^{qT} - S_0 e^{rT}$$

Aus $p \leq 0$ folgt jetzt:

$$F_0 \leq S_0 e^{(r-q)T}$$

Lagerkosten

- Lagerkosten u können als negative Erträge $q = -u$ interpretiert werden, so dass gilt:

$$F_0 \leq S_0 e^{(r+u)T}$$

- die Summe $r + u$ aus Zins- und Lagerkosten wird als Cost of Carry bezeichnet.

| 1989 – 2004 | Lagerkosten (US-\$/Monat) | Lagerkosten p.a. (%) |
|-------------|---------------------------|----------------------|
| Rohöl (WTI) | 0,40/Barrel | 22,05 |
| Heizöl | 3,00/Tonne | 22,05 |
| Aluminium | 7,80/Tonne | 6,31 |
| Gold | 0,004/Unze | 0,01 |
| Weizen | 3,33/Bushel | 11,91 |
| Mais | 2,00/Bushel | 9,97 |

Tabelle 1: Geschätzte Lagerkosten ausgewählter Rohstoffe (1989 – 2004)

Quelle: LEWIS ET AL. (2007), S. 32.

Entnommen aus: [Kern 2010, S. 33](#) ↑

Elektrizität: Lagerkosten ?

Future-Preise beim Crash Oktober 1987

„Trading on Black Monday was chaotic. ... By late afternoon, the S&P 500 Index futures were selling at a 25-point, or 12 percent, discount to the spot market, a spread that previously was considered inconceivable.“

**Quelle: Siegel, J.J. (2002): Stocks for the Long Run, S. 266,
vgl. auch Hull Business Snapshot 5.4**

=> Arbitragemöglichkeit?

- bisher wurde eine obere Grenze für den Futurekurs abgeleitet.
- es stellt sich die Frage, ob und unter welchen Bedingungen der Futurekurs genau an dieser Grenze (dies wird als „Full Carry“ bezeichnet) oder unterhalb dieser Grenze liegt.
- insbesondere im Fall von Backwardation, also Futurekurs F_0 kleiner als Spotpreis S_0 , wäre der Markt nicht in Full Carry.

Reverse Carry Trades

- Betrachte die Situation $F_0 = 38 < S_0 = 40$ (Backwardation)
- Für langfristig orientierte Investoren wie z.B. Pensionsfonds oder Versicherungen würde es sich lohnen, Aktien zum Kurs von $S_0 = 40$ zu verkaufen, den Erlös verzinslich anzulegen und gleichzeitig den Rückerwerb zu $F_0 = 38$ zu vereinbaren.
- alternativ könnten die Papiere für die Laufzeit des Future-Kontraktes an einen Hedgefonds verliehen werden, der dann die entsprechende Transaktion durchführt.

- bei solchen „Reverse“ Carry Trades trennt sich der Investor für die Laufzeit des Futures von dem entsprechenden Wirtschaftsgut, bei gleichzeitigen Rückkauf auf Termin.
- „Reverse“ Carry Trades sind nur möglich, wenn Bestände vorhanden (siehe unten).
- „nackte“ Leerverkäufe ohne vorherige physische Eindeckung sind keine Alternative, da die börsliche Lieferfrist zwei Bankarbeitstage beträgt. (Bei längerer Lieferfrist hätte man es dagegen mit einem originären Termingeschäft (Forward-Kontrakt) zu tun).

Zusammenfassung

$F_0 > S_0 e^{rT}$ (super contango) \Rightarrow Carry Trade vorteilhaft

$F_0 < S_0 e^{rT}$ (kein full carry) \Rightarrow „Reverse“ Carry Trade vorteilhaft

\Rightarrow Arbitragefreiheit:

$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

Falls das Asset Einkommen q generiert:

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T}$$

4. Contango vs. Backwardation: Die Rolle der Convenience Yield

WTI 6M Term Spread



- **Backwardation ($F_0 < S_0$) ist in vielen Futuremärkten ein häufiges Phänomen, z.B. bei Öl-Futures.**
- **Backwardation impliziert Markt ist nicht in Full Carry**
(Ausnahme: $q > r$, trifft aber z.B. bei Lagerkosten u wegen $q = -u$ nicht zu.)
- **in unserer Formel für den Futurekurs kann also das Ungleichheitszeichen nicht immer durch ein Gleichheitszeichen ersetzt werden.**
- **Grund: Reverse Carry Trade Arbitrage nicht immer möglich**

- um zu verstehen warum das der Fall sein kann, betrachte z.B. eine Knappheit am Weizenmarkt mit einem entsprechend hohen Spotpreis für Weizen.
- gleichzeitig wird erwartet, dass die kurz bevorstehende nächste Ernte sehr reichlich sein wird.
- Futures, die erst nach der nächsten Ernte fällig werden, werden also unter dem aktuellen Spotpreis notieren (Backwardation, da nur vorübergehende Knappheit)
- profitable Reverse Carry Trades sind nicht möglich, da alle noch vorhandenen Weizenbestände bis zum Beginn der nächsten Ernte aufgebraucht sein werden.

Eine fragwürdige Hedging-Strategie

- als alternatives Beispiel betrachte eine Öltraffinerie, die ihre Ölvorräte zum (hohen) Spotpreis verkauft und gleichzeitig in (bei Backwardation relativ günstigere) Futures investiert.**
- der zukünftige Bedarf wird am Spotmarkt zu Tagespreisen beschafft. Steigen die Ölpreise, werden Futures mit Gewinn verkauft und so die steigenden Beschaffungspreise ausgeglichen.**

- diese Hedgingstrategie setzt jedoch voraus, dass sich Spotpreis und Futurekurs immer parallel entwickeln.
- dies ist aber bei temporären, nur vorübergehenden Knappheiten am Markt nicht der Fall (Beispiel: Kurzfristige Unterbrechung der Ölproduktion wegen eines Hurrikans). In solchen Fällen steigt nur der Spotpreis, nicht aber länger laufende Futures. Die Hedging-Strategie läuft ins Leere.

Convenience Yield

- falls also mit (nur) vorübergehenden Versorgungsengpässen gerechnet werden muss, ergibt sich ein Vorteil für den physischen Besitz gegenüber dem Halten eines Futurekontraktes.
- dieser Vorteil des physischen Besitzes wird als Convenience Yield y (vgl. Kaldor 1939, deutsch: Verfügbarkeits- oder Liquiditätsprämie) bezeichnet (physischer Besitz als „Real-Option“, die bei Engpässen ausgeübt werden kann)

- mit Hilfe der Convenience Yield y lässt sich folgende Gleichung formulieren:

$$F_0 = S_0 e^{(r + u - y) T}$$

- Convenience Yield y ist als eine Residualgröße zu interpretieren und taucht - im Unterschied zu den Cost of Carry $r + u$ - in keiner Gewinn- und Verlustrechnung auf.

- Backwardation kann durch eine Convenience Yield y erklärt werden, die größer als die Cost of Carry $r + u$ ist.

Investitions- versus Konsumgüter (Hull 5.1; 5.11)..

- *Investitionsgüter* werden für Investitionszwecke dauerhaft gehalten (z.B. Wertpapiere, Fremdwährung, Gold etc.).

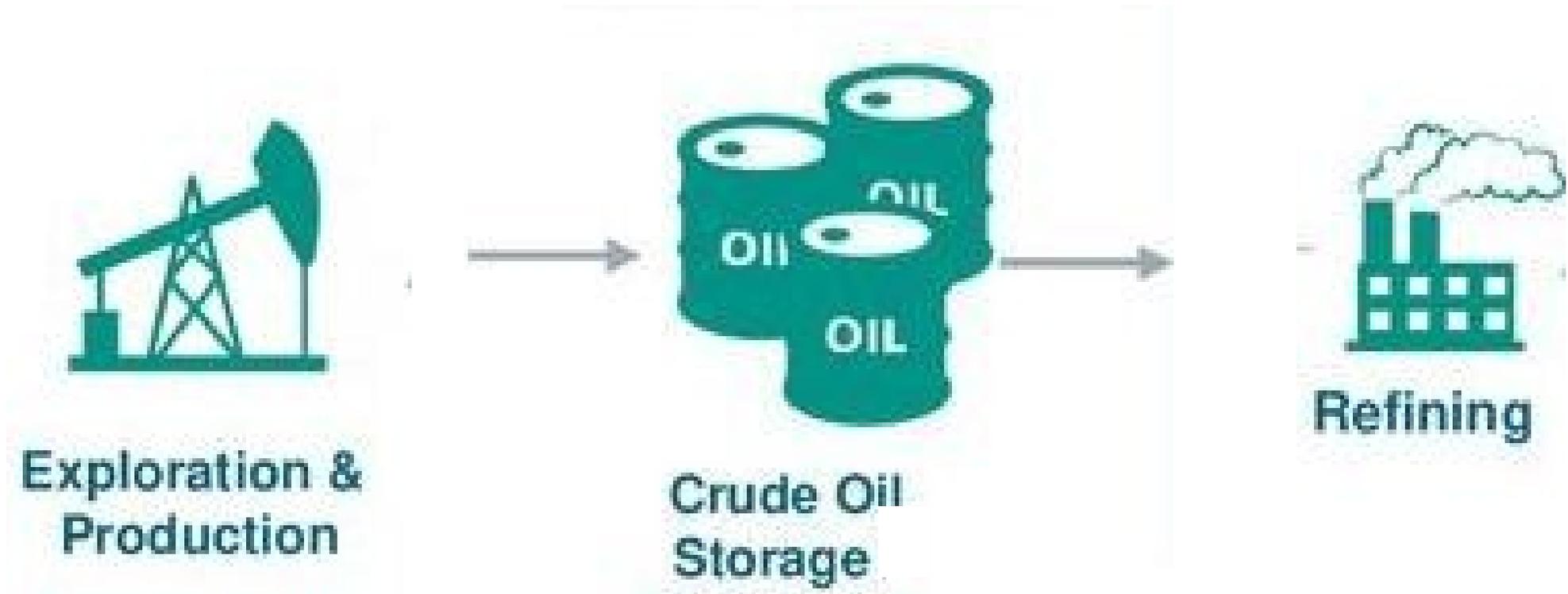
Reverse Carry Trades sind immer möglich, da ausreichende Bestände vorhanden. Der Markt ist immer in Full Carry.

- *Konsumgüter* werden dagegen im Produktionsprozess verbraucht (z.B. Öl, Weizen). Es kann zu Knappheiten mit sehr geringen Lagerbeständen kommen. Aufgrund einer positiven Convenience Yield kann Backwardation eintreten.

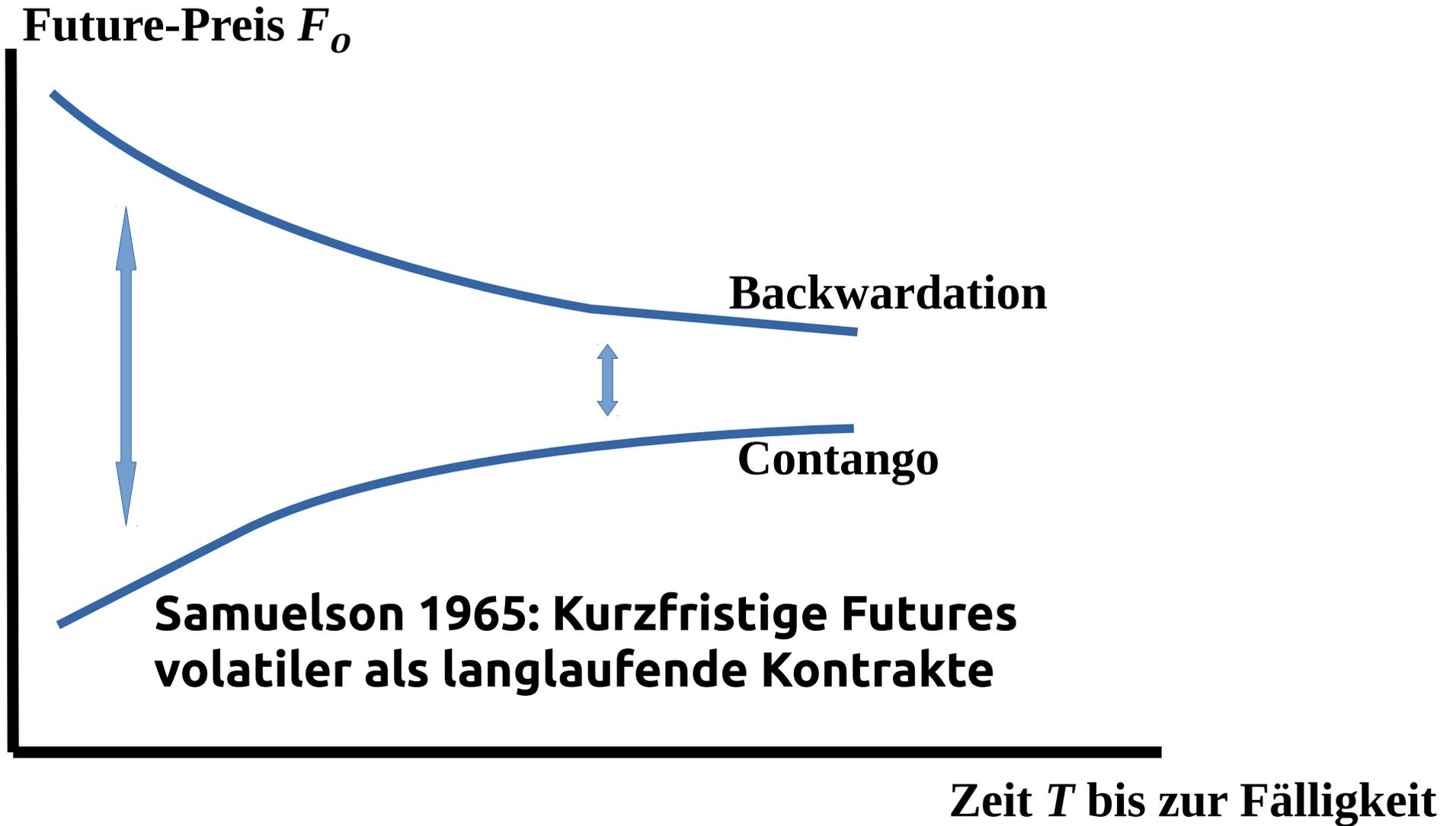
Investitionsgüter (z.B. Gold) werden dauerhaft gelagert



Konsumgüter (z.B. Öl) werden im Produktionsprozess verbraucht



Terminstruktur von Futures im Zeitablauf



Samuelson Hypothese

- Samuelson 1965 hat postuliert, dass der Spotpreis und kurzfristige Futures volatiler sind als langlaufende Kontrakte.**
- bei steigenden Kursen wird daher häufig Backwardation eintreten und bei fallenden Kursen Contango.**
- Die Samuelson Hypothese kann (in Übereinstimmung zu obigen Ausführungen zu Backwardation) damit erklärt werden, dass der Markt für kursbeeinflussende Nachrichten regelmäßig nur einen vorübergehenden Effekt unterstellt.**

2. Optionen

1. Einführung

2. Amerikanische Optionen: Das Problem der vorzeitigen Ausübung

3. Delta-Hedging, Gamma-Risiko und Black-Scholes Differentialgleichung

4. Bewertung mit Binomialbäumen, insb. amerikanische Puts / Optionen auf dividendentragende Aktien

3. Ausblick: Andere Derivate, insb. Swaps

Derivate

**Forwards/Futures
(Terminkontrakte)**
zweiseitig verpflichtend

Optionen

einseitig verpflichtend

**Call / Kauf-
option**

**Put / Ver-
kaufsoption**

Optionsgeschäft

$t = 0$ (heute)

A kauft von B für $c = 12$ € eine europäische Kaufoption (Call) mit Basispreis $K = 90$ € und Fälligkeit in 12 Monaten.

$t = T$ (in 12 Monaten)

Je nach Börsenpreis S_T erwirbt A von B den Basiswert für $K = 90$ € oder lässt die Option wertlos verfallen.

Optionswert = Innerer Wert + Zeitwert

Innerer Wert (Wert bei sofortiger Ausübung):

= $\max(S_T - K, 0)$ für Kaufoption (Call)

= $\max(K - S_T, 0)$ für Verkaufsoption (Put)

2. Amerikanische Optionen: Das Problem der vorzeitigen Ausübung

- *Europäische* Option: Kann nur bei Endfälligkeit ausgeübt werden.

- *Amerikanische* Option: Kann jederzeit während der Laufzeit ausgeübt werden.

=> Wann lohnt sich die vorzeitige Ausübung einer amerikanischen Option?

Eine amerikanische Kaufoption auf eine dividendenlose Aktie sollte nicht vor Fälligkeit ausgeübt werden (Hull 11.5)

- letztlich egal, ob Aktie direkt oder über eine jederzeit ausübbar Option gehalten wird**
- Basispreis möglichst spät zahlen (Zinsvorteil, zumindest falls keine Negativzinsen)**
- Aktienkurs könnte unter Basispreis fallen**

Was gilt wenn die Long-Position in der Aktie komplett aufgelöst werden soll?

- Marktpreis S_t ist der Preis, den potentielle Käufer bereit sind für die Aktie zu zahlen.**
- solche Käufer würden für die nicht ausgeübte Option den inneren Wert $S_t - K$ zu zahlen bereit sein plus einen gewissen Aufschlag für den Zeitwert.**
- also besser die „lebende“ Option verkaufen als diese auszuüben und anschließend die Aktie zu verkaufen**

Formaler Beweis

Portfolio A: Option plus Cash in Höhe des abgezinnten Basiswertes $K(1+i)^{-t}$

=> Wert bei Fälligkeit der Option: $\max(S_T; K)$

Portfolio B: Eine Aktie

=> Wert bei Fälligkeit der Option: S_T (\leq Portfolio A)

> Payoff von Portfolio A ist größer/gleich dem von Portfolio B, daher gilt entsprechend für die Anschaffungskosten:

$$c_t + K(1+i)^{-t} \geq S_t$$

$$c_t \geq S_t - K(1+i)^{-t} > S_t - K$$

> Optionswert c_t also echt größer als innerer Wert der Option

> Vorzeitige Ausübung nicht lohnend (Zeitwert $>$ Null)

Amerikanische Kaufoption auf Basiswerte mit positiven Erträgen

- wenn das Wirtschaftsgut Erträge generiert kann die vorzeitige Ausübung lohnend sein.**
 - Ausübung dann frühestens unmittelbar vor der ersten Ertragszahlung**
 - Optionsbedingungen können eine Anpassung der Parameter (Basispreis und/oder Kontraktgröße) vorsehen, um die Dividendenzahlung zu neutralisieren (Dividendenschutz, vgl. auch Hull 10.4).**
- Dann wäre trotz Dividendenzahlung eine vorzeitige Ausübung nie opportun.**

Vorzeitige Ausübung eines amerikanischen Puts

- für amerikanische Puts (Verkaufsoptionen) gibt es keine allgemeine Aussage hinsichtlich der vorzeitigen Ausübung.**
- wenn der Basiswert völlig wertlos geworden ist (mit Null als unterer Preisgrenze, also keine Negativpreise), lohnt sich auf jeden Fall die sofortige Ausübung.**
- die vorzeitige Ausübung kann sich eventuell aber auch bereits dann lohnen, wenn der Kurs bereits sehr stark unter den Basiswert gefallen ist.**

Vorzeitige Ausübung?

Call

Put

Dividendenzahlung
während der Restlaufzeit?

Keine allgemeine
Aussage möglich

nein

ja

Nie lohnend

Option dividendengeschützt?

ja

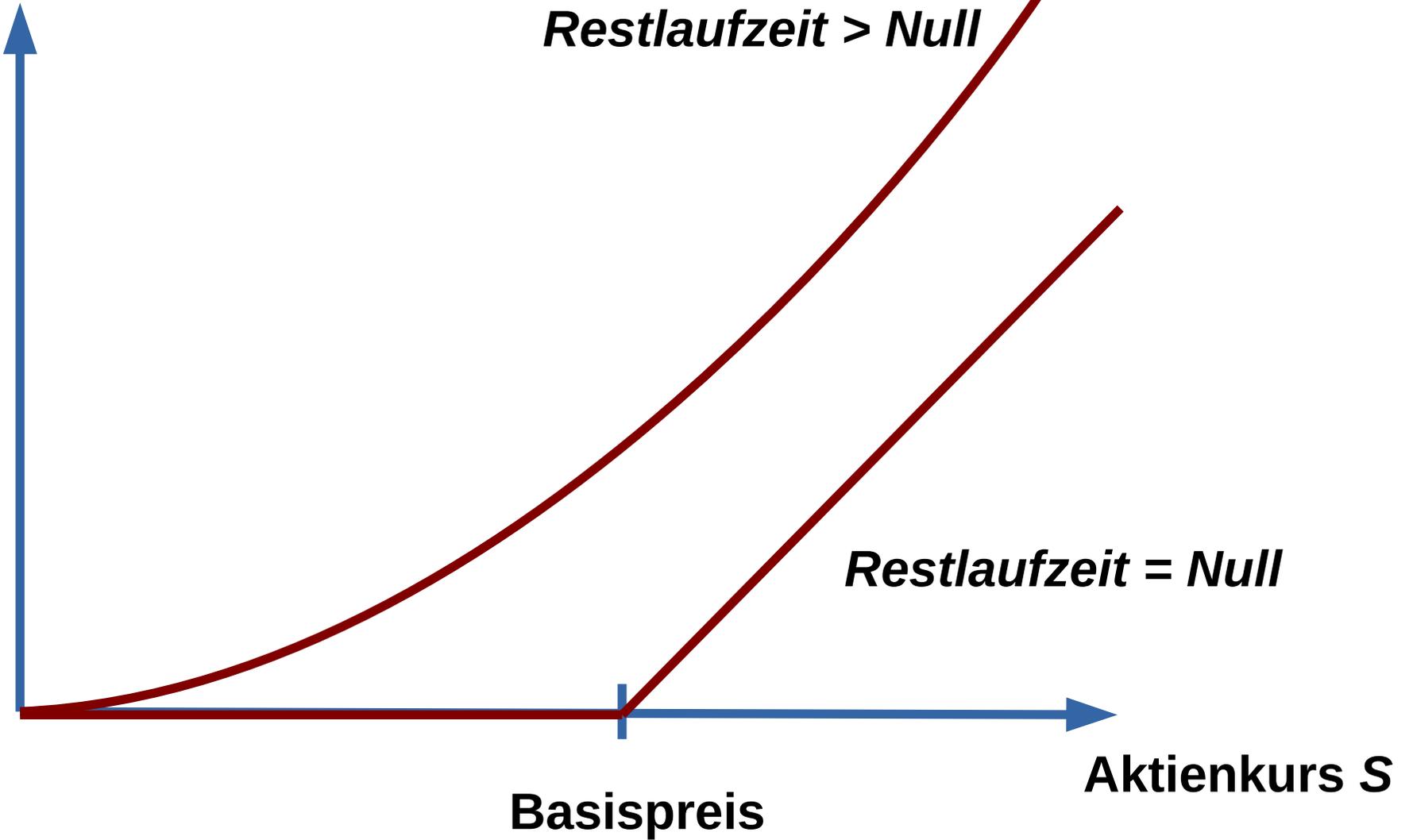
nein

Nie lohnend

Vorzeitige Ausübung
evtl. unmittelbar vor
einem Dividentetermin
lohnend

3. Delta-Hedging, Gamma-Risiko und Black-Scholes Differentialgleichung

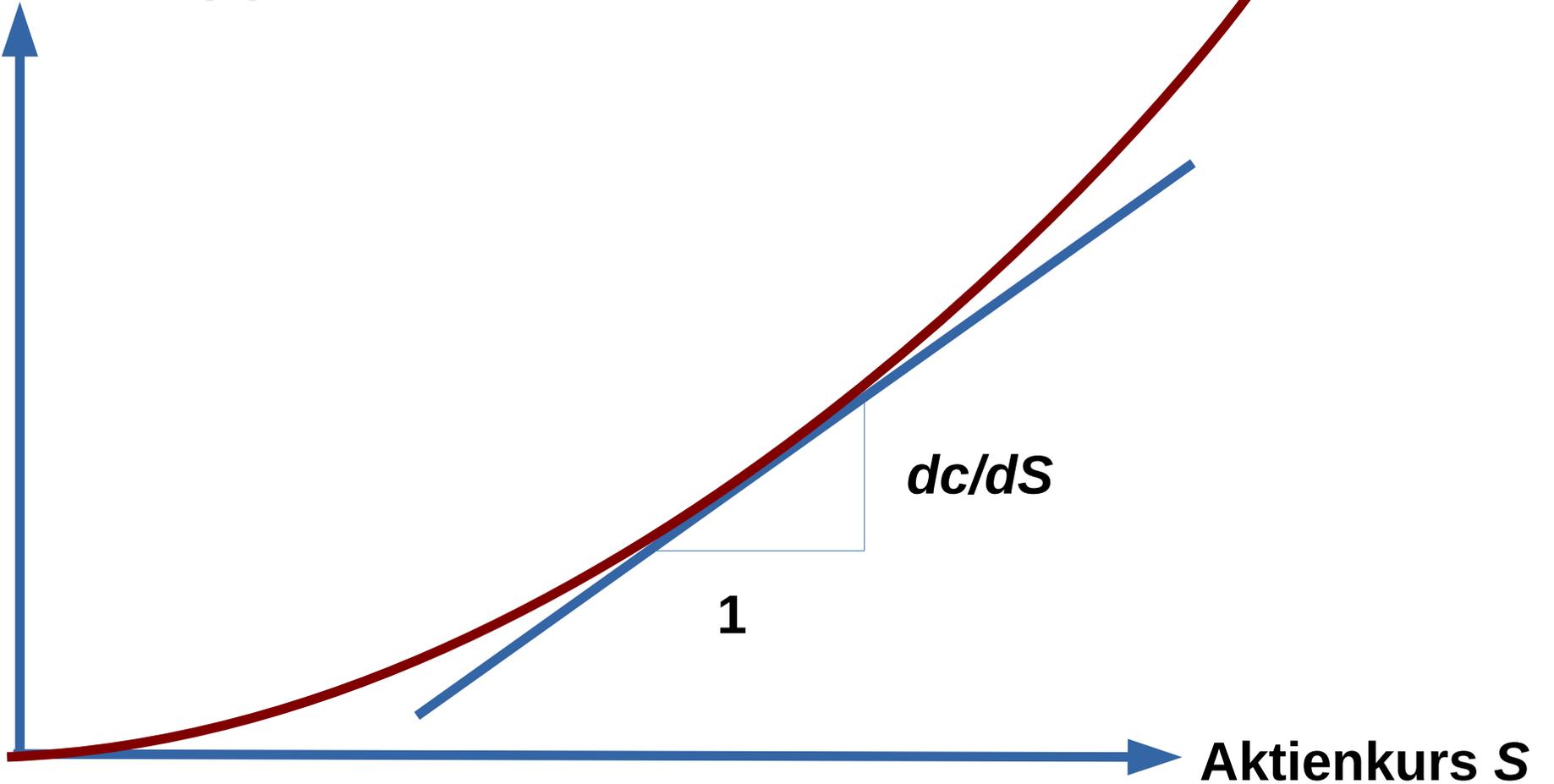
Kurs Call $c(S)$



Delta-Hedging (Hull 19.4)

- Delta ist die erste Ableitung des Optionpreises $c(S)$ nach dem Aktienkurs S : $\Delta = \frac{dc}{dS}$
- wenn der Aktienkurs um 1 € steigt/fällt, dann steigt/fällt der Optionspreis um Delta Δ .
- eine Option hat daher approximativ das gleiche Risiko / Chancenprofil wie ein Portfolio aus Δ Stück Aktien

Kurs Call $c(S)$



Zahlenbeispiel

Portfolio A: 100 Optionen, wobei $\Delta = 0,79$

Portfolio B: 79 Aktien

| <u>Aktienkurs</u> | <u>Optionspreis</u> |
|-------------------|---------------------|
| 99 | 11,57 |
| ±1 | ±0,78 |
| 100 | 12,35 |
| ±1 | ±0,80 |
| 101 | 13,15 |

=> wenn der Aktienkurs um ± 1 € schwankt, dann ungefähr gleicher Gewinn/Verlust bei beiden Portfolios A und B.

(Annahmen: Basispreis $K = 90$, Restlaufzeit $T = 1$ Jahr, Zins $r = 0,5\%$ und Volatilität $\sigma = 15\%$)

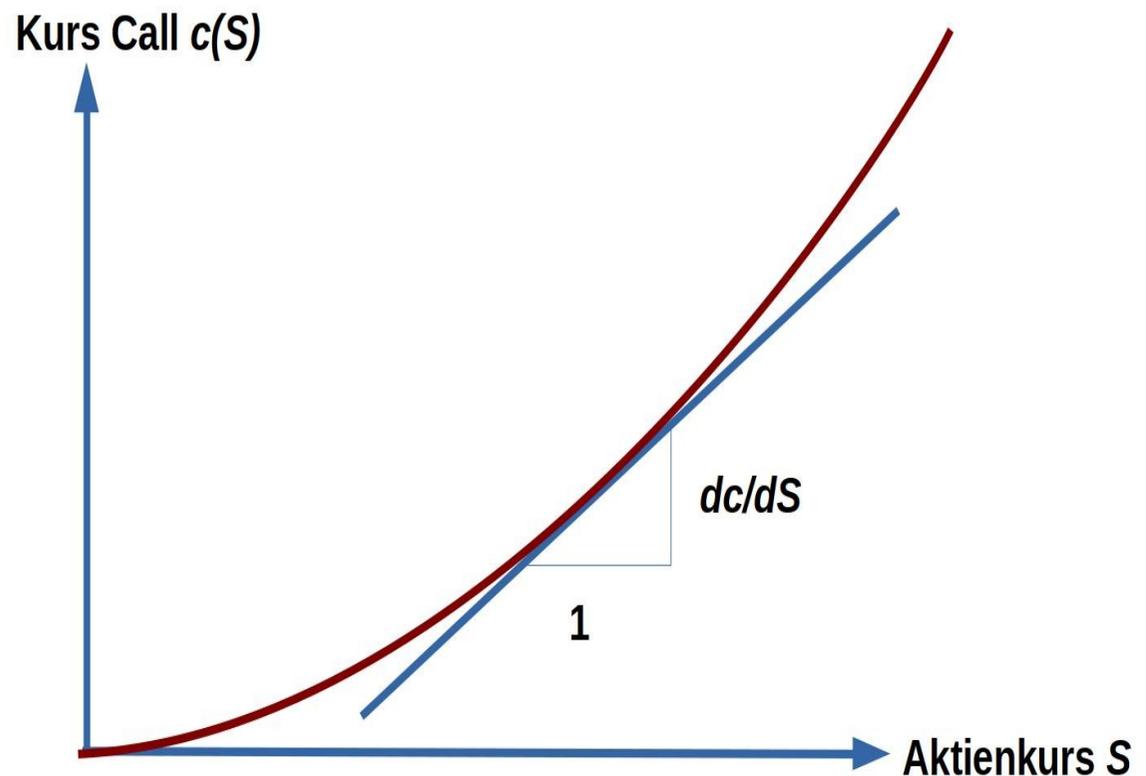
- eine solche Delta-Approximation ist ungenau, da der Optionswert ist eine konvexe Funktion des Aktienkurses S ist:

- bei einem Kursrückgang der Aktie von 1 € fällt der Call nur um 78 Cent

- bei einer Kurssteigerung von 1 € steigt der Call sogar um 80 Cent

=> Delta-Approximation unterschätzt die Gewinne der Option und überschätzt die Verluste.

Der Optionswert ist keine lineare Funktion des Aktienkurses. Bei sinkenden Kursen verliert die Option weniger an Wert und gewinnt bei steigenden Kursen mehr an Wert als der Basiswert (Konvexität bzw. Gamma-Risiko)



Dynamisches Delta-Hedging in der Praxis (Hull 19.4)

- eine Bank hat Call-Optionen auf die OC Oerlikon Aktie an einen Kunden verkauft. Die Bank fungiert also als Stillhalter.**
- für die Bank ergibt sich ein negativer Marktwert, der mit steigenden Kursen zunimmt und umgekehrt.**
- um dieses Risiko zu hedgen, wird die Bank für jede Option Δ Stück Aktien kaufen**
- allerdings muss das Hedge-Portfolio kontinuierlich angepasst werden, da das Delta bei steigenden Kursen zunimmt und bei fallenden Kursen abnimmt.**

Dynamisches Delta-Hedging und Volatilität

9. August 2007 (sda/Reuters)

Händler erklärten, der Verkaufsdruck sei von Derivaten auf die Oerlikon-Aktien verstärkt worden. ... Denn wenn die Aktie deutlich unter die Options-Ausübungskurse sinke, sei es nicht mehr notwendig, gleich viele Aktien als Absicherung zu halten. Dies löse eine Abwärtsspirale aus.

9. November 2007 (Neue Zürcher Zeitung)

Im SLI setzten die Titel von OC Oerlikon ... ihren seit drei Tagen andauernden Aufwärtstrend fort. ... Ein Analyst merkte an, es müssten Positionen aufgebaut werden, um Optionen zu hedgen.

**Erwartungswert des Optionspreises:
Approximation durch Taylor-Entwicklung 2. Grades
(vgl. entsprechend auch Itô's Lemma)**

$$E\{c[S(1 \pm \varepsilon)]\} = c(S) \pm \underbrace{E(\varepsilon) S \frac{dc}{dS}}_{= 0} + \frac{1}{2} \underbrace{E(\varepsilon^2) S^2 \frac{d^2 c}{dS^2}}_{\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2 c}{dS^2}}$$

**Zufällige Rendite ε
mit $E(\varepsilon) = 0$**



Anwendung auf das Zahlenbeispiel

($\varepsilon = \pm 1\%$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit 50%)

$$E(c) = \frac{c(99) + c(101)}{2} = \frac{11,57 + 13,15}{2} = 12,36 > 12,35 = c(100)$$

=> Mittelwert der Optionswerte für Aktienkurse $S = 99$ und $S = 101$ ist größer als der Optionswert für $S = 100$.

=> Option profitiert von der Volatilität des Aktienkurses, da sich Gewinne und Verluste nicht vollständig aufheben.

=> nachteilig für die Option ist dagegen, dass der Zeitwert im Zeitverlauf kontinuierlich abnimmt, d.h. $dc/dt < 0$

**Vorteilhaftigkeitsvergleich für das Halten der Option versus
des Haltens des Delta-Hedge-Portfolios aus $\Delta = \frac{dc}{dS}$ Stück**

Aktien:

- **Eingesparte Finanzierungskosten:** $r S \frac{dc}{dS}$
- **Finanzierungskosten Option:** $- r c$
- **Kontinuierlicher Wertverlust der Option:** dc / dt
- **Vorteil aus der Konvexität:** $\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{d^2 c}{dS^2}$

Black-Scholes-Merton Differentialgleichung (Hull 15.6)

Wegen Arbitragefreiheit muss die Summe der Terme gleich Null sein (diese Differentialgleichung gilt für beliebige Derivate):

$$rS \frac{dc}{dS} - rc + \frac{dc}{dt} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{d^2c}{dS^2} = 0$$

vgl. Black 1989, Black/Scholes 1973, Merton 1973

Fisher Black (1938 – 1995)

Nobelpreis 1997:

Myron Scholes (*1941), Robert C. Merton (*1944)

Frühe Wegbereiter:

Louis Bachelier (1870-1946), Vinzenz Bronzin (1872–1970)

Black-Scholes-Merton Bewertungsformel (Hull 15.8)

Speziell für einen europäischen Call auf eine dividendenlose Aktie mit Auszahlungsprofil $\max(S_T - K, 0)$ ergibt sich eine explizite Lösung der Differentialgleichung:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

mit:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Dabei ist:

S_0 = Kurs des Basiswertes zum Bewertungszeitpunkt $t = 0$

**$N(x) = P(X < x)$ = kumulative Verteilungsfunktion für eine
standardnormalverteilte Zufallsvariable X**

K = Basispreis bzw. Bezugspreis

r = stetiger Zinssatz

T = Zeit (in Jahren) bis zur Fälligkeit (z.B. $T = 1/4$)

σ = Volatilität des Underlying (z.B. $\sigma = 30\% = 0,3$)

Volatilität σ

- Volatilität einzige Einflussgröße des Optionspreises, die in der Realität nicht bekannt ist.
- Modell unterstellt konstante Volatilität, tatsächlich kann sich diese im Zeitablauf ändern (Heteroskedastizität): Z.B. schlagartige Erhöhung der Volatilität zu Beginn der Pandemie.
- historische Volatilität wird aus Vergangenheitsdaten berechnet; implizite Volatilität reflektiert Erwartungen und basiert auf Optionspreisen (VDAX misst die implizite Volatilität.)
- siehe auch:
<https://www.boerse-frankfurt.de/wissen/handeln/volatilitaet>

Bewertung europäischer / amerikanischer Calls / Puts

| | |
|-----------------------------|---|
| Europäischer Call: | Black-Scholes-Merton Formel |
| Amerikanischer Call: | Gleicher Wert wie europäischer Calls, da das Recht auf vorzeitige Ausübung nie ausgeübt wird (zumindest bei einer dividendenlosen Aktie, sonst numerische Verfahren) |
| Europäischer Put: | Bewertung über Put-Call-Parität |
| Amerikanischer Put: | Numerische Verfahren |

„Greeks“ (Sensitivitätskennzahlen)

| | |
|---------|--|
| „Delta“ | 1. Ableitung nach dem Aktienkurs S : $\frac{d c}{d S}$ |
| „Gamma“ | 2. Ableitung nach dem Aktienkurs S : $\frac{d^2 c}{d S^2}$ |
| „Rho“ | Ableitung nach dem Zins r : $\frac{d c}{d r}$ |
| „Theta“ | Ableitung nach der Zeit t : $\frac{d c}{d t}$ |
| „Vega“ | Ableitung nach der Volatilität σ : $\frac{d c}{d \sigma}$ |

4. Bewertung mit Binomialbäumen, insb. amerikanische Puts / Optionen auf dividendentragende Aktien

| Beispiel: | Investition in $t = 0$ | Payoff f_d „down“- Szenario | Payoff f_u „up“- Szenario |
|--|--|---|---|
| Aktie: | - 340 | 300 | 400 |
| Anlage/Kredit zu 10%: | - 100 | 110 | 110 |
| 1 Aktie und 273 € Kredit: | - 340 + 273 = - 67 | 300 - 273*1,1 = 0 | 400 - 273*1,1 = 100 |
| -1 Aktie (Leerverkauf) u. 364 € Geldanlage: | 340 - 364 = - 24 | -300 + 364*1,1 = 100 | -400 + 364*1,1 = 0 |
| Call mit Basis 350: | ? | 0 | 50 |

Zusammenfassung

Portfolio A:

Zusammensetzung: 1 Aktie und 273 € Kredit:

Investitionssumme: 67 €

Payoffs: $f_{down} = 0 \text{ €}$ und $f_{up} = 100 \text{ €}$

Portfolio B:

Zusammensetzung: -1 Aktie (Leerverkauf) und Geldanlage 364 €

Investitionssumme: 24 €

Payoffs: $f_{down} = 100 \text{ €}$ und $f_{up} = 0 \text{ €}$

- jeder Euro im „up“-Szenario kostet 67 Cent
- jeder Euro im „down“-Szenario kostet 24 Cent
- z.B. ist der Payoff der Option 50 € im „up“-Szenario und 0 € im „down“-Szenario => Optionspreis $50 * 0,67 = 33,5$ €
- die allgemeine Bewertungsformel für ein Derivat mit Payoff f_u im „up“-Szenario und f_d im „down“-Szenario lautet:

$$f = 0,67 f_u + 0,24 f_d = \frac{0,74 f_u + 0,26 f_d}{1,1}$$

Beispiele:

- **Aktie ($f_{up} = 400 \text{ €}; f_{down} = 300 \text{ €}$):**

$$f = \frac{0,74 \cdot 400 + 0,26 \cdot 300}{1,1} = 340 \quad \checkmark$$

- **Geldanlage ($f_{up} = 110 \text{ €}; f_{down} = 110 \text{ €}$):**

$$f = \frac{0,74 \cdot 110 + 0,26 \cdot 110}{1,1} = 100 \quad \checkmark$$

- **Option ($f_{up} = 50 \text{ €}; f_{down} = 0 \text{ €}$):**

$$f = \frac{0,74 \cdot 50 + 0,26 \cdot 0}{1,1} = 33,6 \quad \checkmark$$

Allgemeine Bewertungsformel (Berechnung von p , Hull 13.1)

- Aktie steigt von S_0 entweder auf $S_0 u$ oder fällt auf $S_0 d$, wobei $u > 1$ und $d < 1$
- (stetiger) risikoloser Zins r
- dann lautet die allgemeine Bewertungsformel:

$$f = \frac{p f_u + (1-p) f_d}{e^{rT}} \quad \text{mit} \quad p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

Kontrollrechnung für fiktive W-keit p :

- hier: $S_0 = 340$, $S_0 u = 400$ und $S_0 d = 300$,

also $u = \frac{400}{340}$ und $d = \frac{300}{340}$

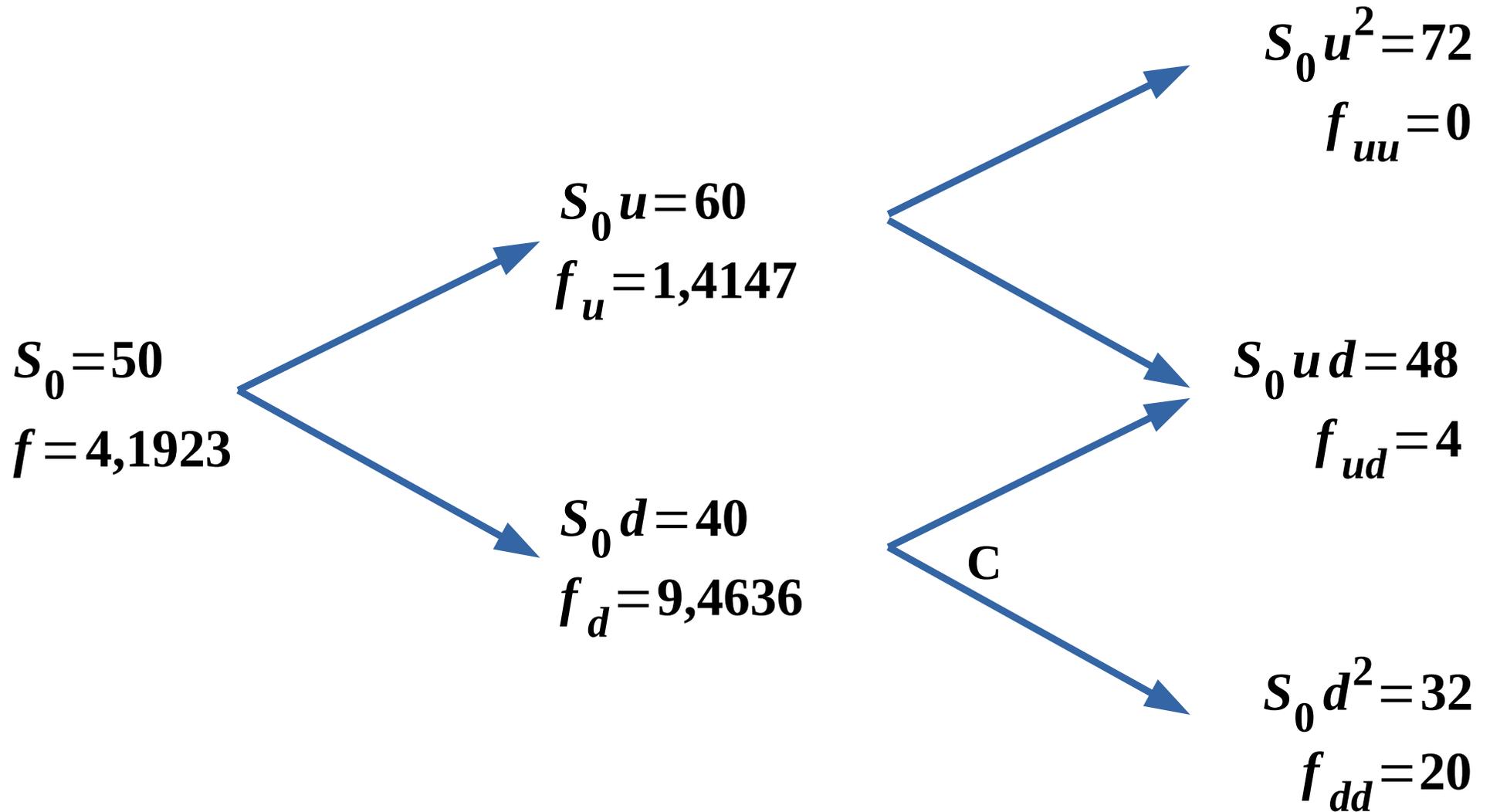
Zusammen mit $e^{rT} = 1,1$ ergibt sich:

$$p = \frac{1,1 - \frac{300}{340}}{\frac{400}{340} - \frac{300}{340}} = \frac{1,1 * 340 - 300}{400 - 300} = 0,74$$


Risikoneutrale Bewertung (Hull 13.2)

- die allgemeine Bewertungsformel kann als diskontierter Erwartungswert interpretiert werden.**
- die Bewertung kann also so erfolgen, „als ob“ allseitige Risikoneutralität vorliegen würde.**
- beachte, dass über die tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten des up- und down-Szenarios keine Annahmen getroffen wurden. Diese müssen also nicht mit p und $1 - p$ übereinstimmen (außer es liegt allgemeine Risikoneutralität vor)**

Bewertung einer europäischen Put-Option



Bewertung einer europäischen Put-Option (Hull 13.4)

- bewertet wird ein europäischer Put mit Basispreis $K = 52 \text{ €}$ und Restlaufzeit $T = 2 \text{ Jahre}$
- der Zeitraum bis zur Fälligkeit wird in zwei Abschnitte der Länge $\Delta t = 1$ eingeteilt
- der aktuelle Aktienkurs ist $S_0 = 50$, weiterhin gilt $u = 1,2$ und $d = 0,8$ (\Rightarrow Aktienkurs $\pm 20\%$ je Zeitschritt) und $r = 5\%$
- in den Endpunkten kann der Wert des Puts unmittelbar aus $\max(52 - S_T, 0)$ berechnet werden.

- hiervon ausgehend kann sukzessive auch für alle davor liegenden Knotenpunkten der Wert des Puts berechnet werden (Rückwärtsinduktion)

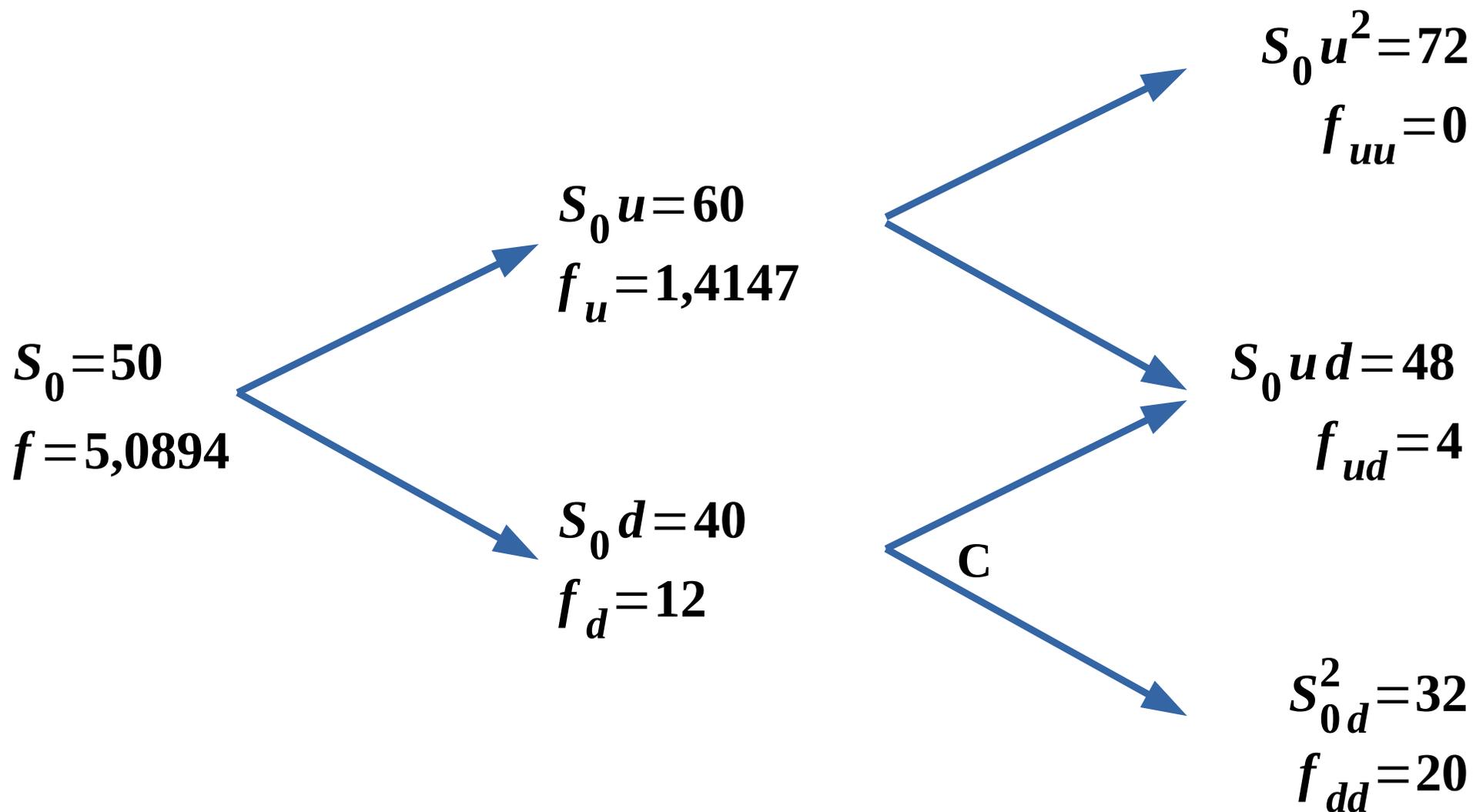
- anzuwenden dabei ist jeweils die Formel:

$$f = \frac{p f_u + (1-p) f_d}{e^{r\Delta t}} \quad \text{mit: } p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0,05 \cdot 1} - 0,8}{1,2 - 0,8} = 0,6282$$

- z.B. gilt im Knoten C: $\frac{0,6282 \cdot 4 + (1 - 0,6282) \cdot 20}{e^{0,05 \cdot 1}} = 9,4636$

- Endergebnis: Wert des europäischen Puts $f = 4,1923 \text{ €}$

Abwandlung: Amerikanische Put-Option (Hull 13.5)

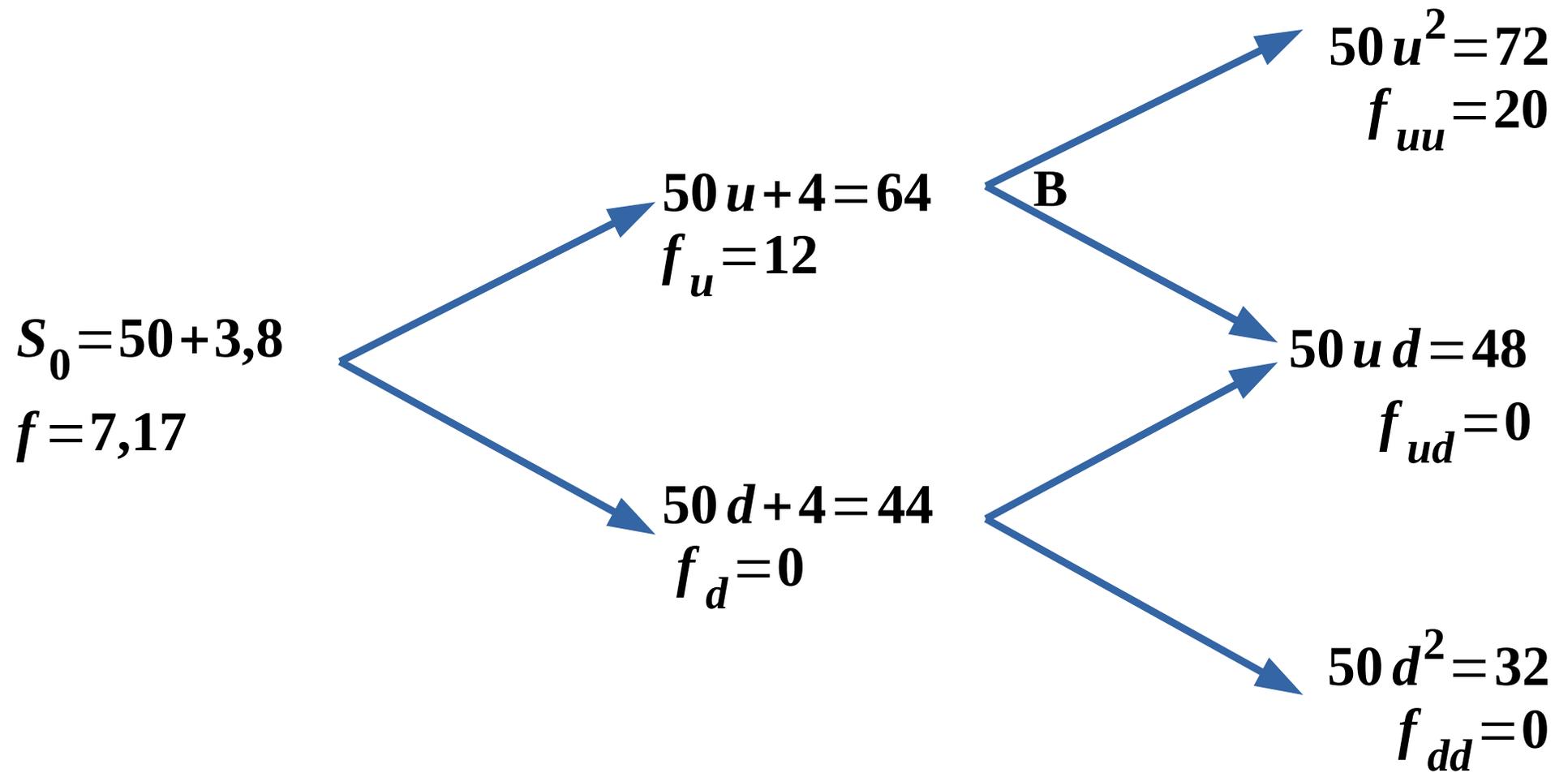


- würde es sich um einen amerikanischen Put handeln, dann muss in jedem Knoten überprüft werden, ob sich eine vorzeitige Ausübung eventuell lohnt.
- dies ist im Knoten C tatsächlich der Fall, da bei Ausübung $\max(52 - 40, 0) = 12$ erzielt werden können, während der Wert einer europäischen Puts in diesem Knoten nur 9,4636 beträgt.
- der Wert eines amerikanischen Puts ist also:

$$f = \frac{0,6282 \cdot 1,4147 + (1 - 0,6282) \cdot 12}{e^{0,05 \cdot 1}} = 5,0894$$

Amerikanischer Call auf dividendenzahlende Aktie (Hull 21.3)

- Betrachtet wird ein amerikanischer Call mit $K = 52 \text{ €}$
- sei $S_0 = 53,8 \text{ €}$ und es sei bekannt dass in $t = 1$ eine Dividende von 4 € gezahlt wird.
- von den $S_0 = 53,8 \text{ €}$ entfallen $3,8 = 4 e^{-0,05}$ auf die Dividende
- für $S_0^* = 50 \text{ €}$ wird der Zufallsprozess wie oben modelliert
- im Knoten B lohnt sich die vorzeitige Ausübung, weil man sonst auf die Dividende verzichten würde. Der Wert des Calls im Knoten B wäre andernfalls: $\frac{0,6282 \cdot 20 + 0}{e^{0,05 \cdot 1}} = 11,95 < 12$



Erhöhung der Anzahl an Zeitschritten

- der Optionswert kann immer besser approximiert werden, wenn man die Laufzeit in immer mehr Zeitschritte unterteilt.

- damit die Volatilität im Modell mit der tatsächlichen Volatilität σ der Aktie übereinstimmt, ist $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ und $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ zu wählen. (vgl. Cox, Ross, Rubinstein 1979)

(dabei ist bei n Zeitschritten $\Delta t = \frac{T}{n}$, wobei die Restlaufzeit T der Option üblicherweise in Jahren gemessen wird und σ ebenfalls die Volatilität der jährlichen Renditen bezeichnet)

Übergang zum Black-Scholes-Merton-Modell

- im Grenzfall mit unendlich vielen Zeitschritten konvergiert das Modell gegen die bekannte Black/Scholes-Formel
- daher lässt sich der Wert einer Option auch als diskontierter Erwartungswert schreiben (Hull 15.8):

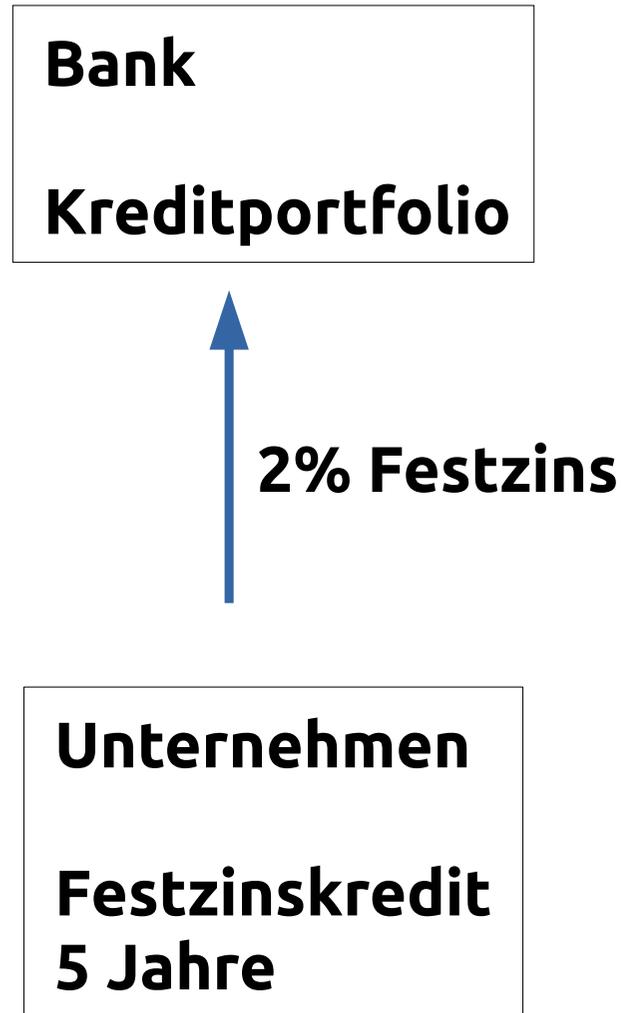
$$c = \frac{E[\max(S_T - K, 0)]}{e^{rT}} \quad \text{bzw.} \quad p = \frac{E[\max(K - S_T, 0)]}{e^{rT}}$$

Dabei ist S_T log-normalverteilt, d.h. der Logarithmus $\ln(S_T)$ normalverteilt mit Erwartungswert $\ln(S_0) + (r - \sigma^2/2)T$ und Varianz $\sigma^2 T$ (Hull, Anhang Kapitel 15)

3. Ausblick: Andere Derivate, insb. Swaps

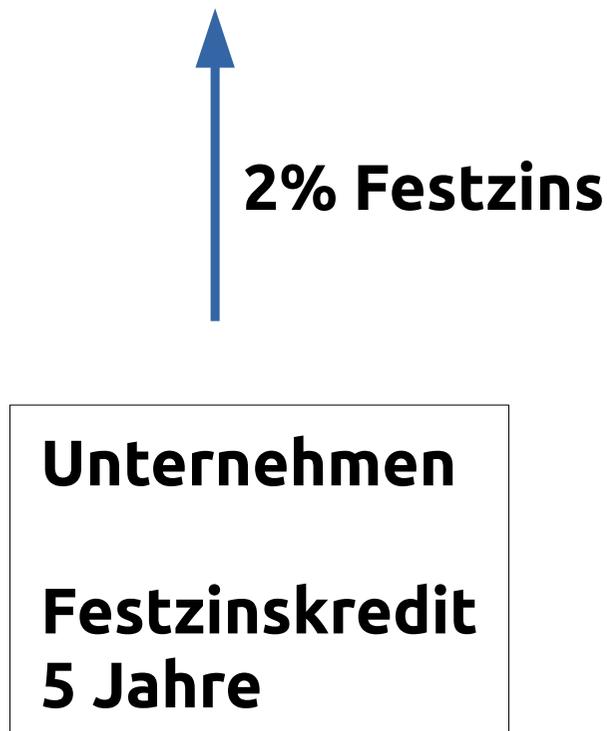
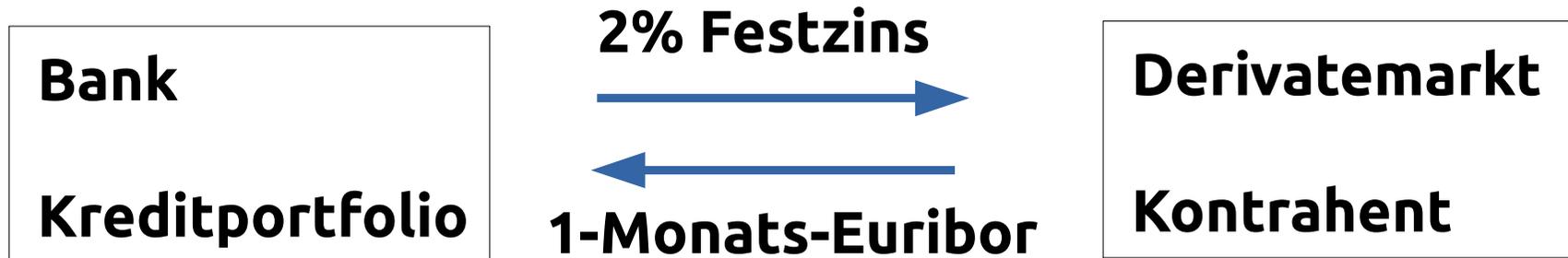
Zinsswaps

- in der einfachsten Form Tausch von fixen und variablen Zinszahlungen (z.B. Euribor+x oder Libor+x).**
- Zinsswaps sind außerbörsliche Geschäfte.**
- Das Volumen der Zinsswaps macht einen Großteil des OTC Derivatemarktes aus.**
- Definitionen der International Swaps and Derivatives Association werden als Standard-Vertragswerk genutzt.**



Zinsänderungsrisiko:

Wenn der Marktzins von 2% auf 4% steigt, sinkt der Barwert eines endfälligen Kredites mit 2% Festzins von 100.000 € auf 91.096 €



Durch den frühzeitigen Abschluss eines Zinsswaps (fixe gegen variable Zinszahlungen) kann das Zinsänderungsrisiko gehedgt werden. Die Bank erhält immer den marktüblichen Zins.

Eigenschaften von Zinsswaps

- an regelmäßigen Fixing-Terminen (z.B. halbjährlich) wird der für die folgende Periode nachschüssig auf einen bestimmten Nominalbetrag zu zahlende variable Zins festgelegt.**
- da nur die Differenz zwischen fixen und variablen Zins getauscht wird, ist nur der Differenzempfänger einem Kreditrisiko ausgesetzt.**

Bewertung von Zinsswaps (vgl. auch Hull 7.7, Beispiel 7.2)

- die Konditionen werden so gewählt, dass zu Beginn die Barwerte der festen und der variablen Zinszahlungen übereinstimmen. Der Zinsswaps hat für beide Parteien zunächst den Wert Null.

- ändert sich später der Marktzins, dann weichen die Barwerte voneinander ab. Es entsteht ein Wiederbeschaffungsrisiko für die Partei, für die der Swap einen positiven Barwert aufweist

- Um die Berechnung zu vereinfachen, wird fiktiv der Tausch der Nominalbeträge bei Laufzeitende unterstellt.**
- zu bewerten ist dann die Differenz zwischen einer festverzinslichen und einer variabel verzinsten Anleihe.**
- die festverzinsliche Anleihe kann durch Diskontierung des gegebenen Cashflows bewertet werden.**
- der Wert der variabel verzinsten Anleihe ist an den Zinsanpassungsterminen gleich dem Nominalbetrag.**

- liegt der Bewertungsstichtag dagegen zwischen zwei Zinsanpassungsterminen, ergibt sich der Wert der variabel verzinsten Anleihe wie folgt:

$$(L+k^*)e^{-r^*t^*}$$

Dabei ist:

L = Nominalbetrag

**k^* = Höhe der Zinszahlung am nächsten Zinsanpassungstermin
(wurde am vorherigen Termin festgelegt)**

r^* = aktueller Zins

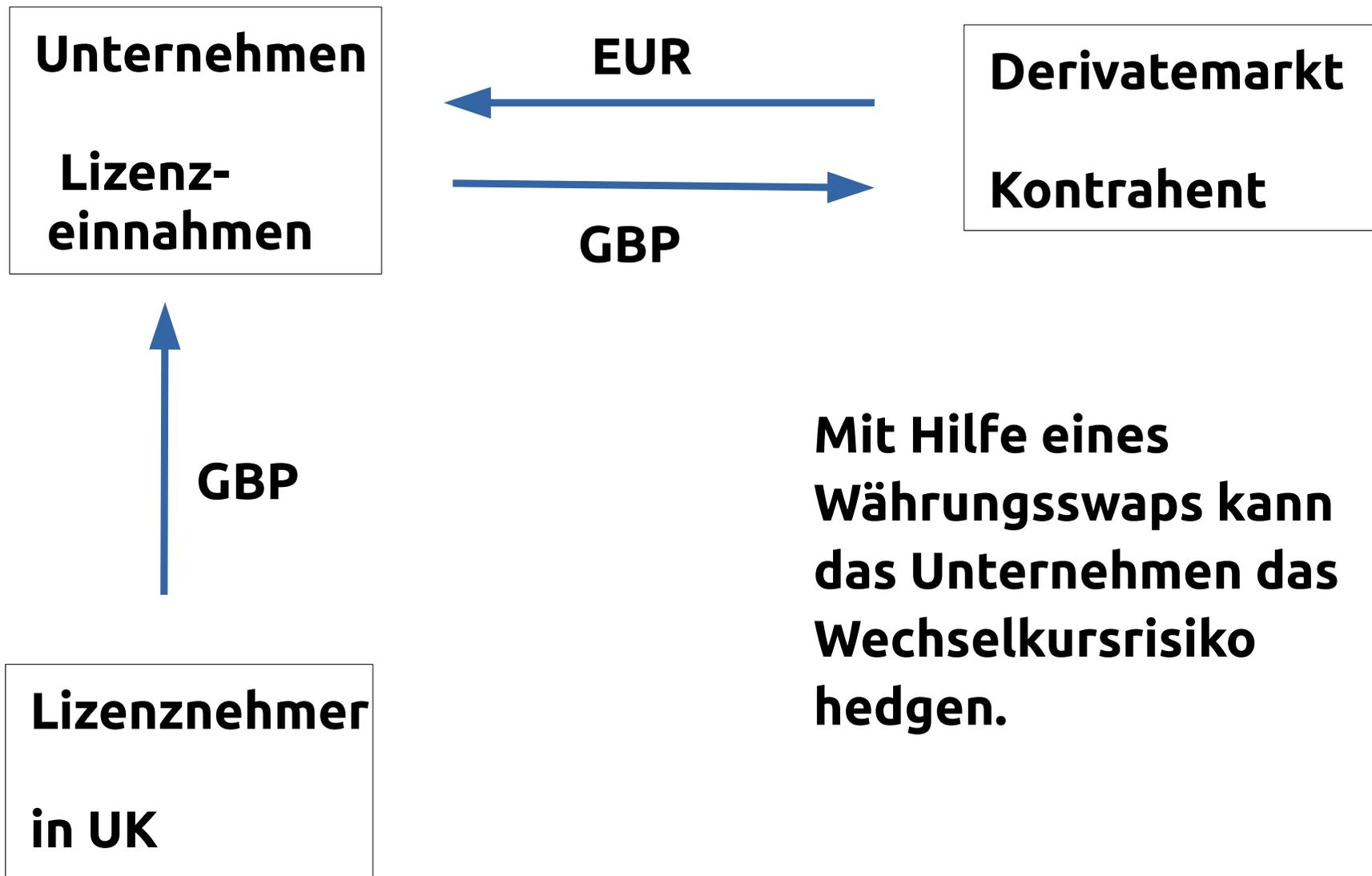
t^* = Zeit bis zum nächsten Zinsanpassungstermin

- alternativ kann ein Zinsswaps auch als Portfolio so genannter Forward Rate Agreements bewertet werden:

Bei einem Forward Rate Agreement wird bereits heute vereinbart, für einen festgelegten Zeitraum, der erst zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft beginnt, statt dem dann gültigen variablen Marktzins einen vorab festgelegten Festzins zu zahlen.

Währungsswaps

- ein ansonsten nur im Inland tätiges Unternehmen hat jährliche Lizenzeinnahmen aus UK von 100.000 GBP**
- für dieses Unternehmen kann eine Swapvereinbarung sinnvoll sein, bei der jährlich 100.000 GBP zu zahlen sind und ein konstanter jährlicher Eurobetrag empfangen wird.**



Mit Hilfe eines Währungsswaps kann das Unternehmen das Wechselkursrisiko hedgen.

Bewertung von Währungsswaps

- zu vergleichen sind die Barwerte der Zahlungen in heimischer und in fremder Währung**
- der Barwert der Zahlungen in heimischer Währung kann wie üblich durch Diskontierung berechnet werden**
- für die Zahlungen in Fremdwährung kann zunächst der Barwert in Fremdwährung berechnet werden und dieser dann mit dem aktuellen Wechselkurs in heimische Währung umgerechnet werden.**

- alternativ können entsprechende Termingeschäfte unterstellt werden, mit denen jede zukünftige Fremdwährungszahlung zu bereits heute garantierten Terminkursen in heimische Währung getauscht werden kann. Man erhält einen Cashflow in heimischer Währung, dessen Barwert wie üblich berechnet werden kann.

Literatur:

- Ahn, D. P. (2018): Principles of commodity economics and finance, MIT Press.
- Black, F., M. Scholes (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. In: Journal of Political Economy. 81, 3, S. 637–654.
- Black, F. (1989), How We Came up with the Option Formula, The Journal of Portfolio Management, Vol. 15, Winter, S. 4-8.
- Cox, J. C., S. Ross, M. Rubinstein (1979): Option Pricing: A Simplified Approach. In: Journal of Financial Economics. Nr. 7, S. 229–263.
- Hull, J. (2015): Optionen, Futures und andere Derivate 9. Auflage
- Inhaltsverzeichnis: <http://d-nb.info/1075875099/04↑>)
- Kaldor, N. (1939): Speculation and Economic Stability, in: Review of Economic Studies, vol. 7, issue 1, S. 1-27
- Kern, A. (2010): Commodity Futures - Enhanced Strategien zur Performancesteigerung?
- Lewis, M. (2007): The universe of commodity indices. Commodity Now 11, 40–46.
- Merton, R. C. (1973): Theory of Rational Option Pricing. In: The Bell Journal of Economics and Management Science. 4, S. 141–183.
- Rau-Bredow, H. (2022): Contango and Backwardation in Arbitrage-Free Futures-Markets online: <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/111688>
- Samuelson, P. (1965): Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly. Industrial Management Review, 6, 41-49.