Termingeschäfte und Derivate

Hans Rau-Bredow

hans.rau-bredow@uni-wuerzburg.de

Foliensatz:

www.rau-bredow.de

über mich:

- **Studium Mathematik und Philosophie, Universität Bonn**

- **Studium Wirtschaftsmathematik, TU München**

- **Promotion in Betriebswirtschaftslehre, LMU München:**
  „Zur theoretischen Fundierung der Institutionenökonomie"

- **Habilitation für Betriebswirtschaftslehre, JMU Würzburg:**
  „Finanzierungsverträge und Konzernbildung"

Termine:

Montag, 10.03.2025, 10:15 Uhr

Dienstag, 11.03.2024, 10:15 Uhr

Freitag, 14.03.2024, 10:15 Uhr

Ort: Seminarraum 308

Gliederung

Montag: 1. Futures

Dienstag: 2. Optionen

3. Ausblick: Andere Derivate, insb. Swaps

Freitag: Wiederholung und Ergänzungen

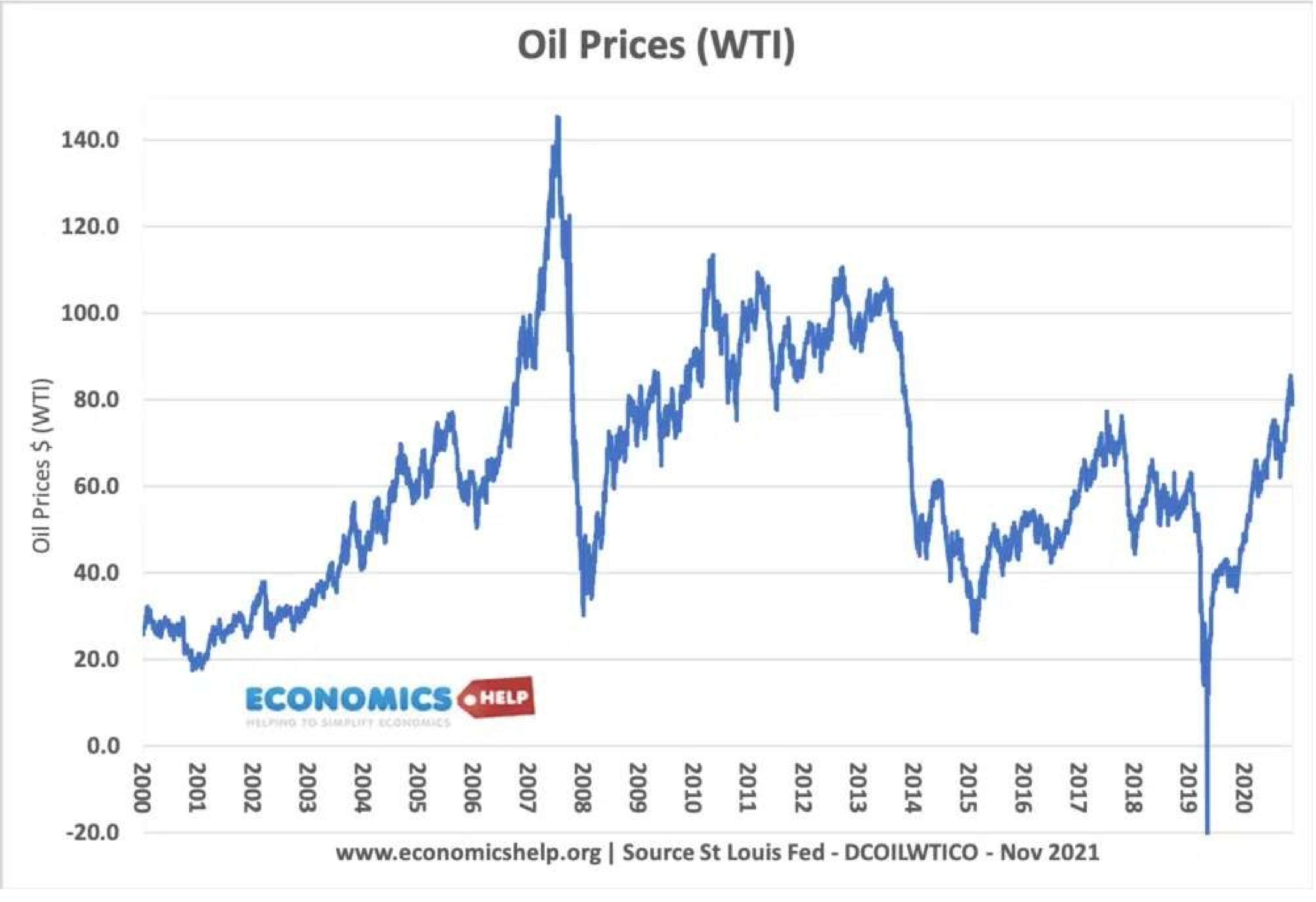
Basisliteratur

Hull, John: Optionen, Futures und andere Derivate (Options, Futures and Other Derivatives)

(versch. Auflagen, hier wurde die deutsche Ausgabe von 2015 (9. Auflage) benutzt, Link zum Inhaltsverzeichnis der 9. Auflage: *http://d-nb.info/1075875099/04↑*)

Rau-Bredow, Hans (2022): Contango and Backwardation in Arbitrage-Free Futures-Markets

online: *https://mpra.ub.uni-muenchen.de/111688*



Oil Prices (WTI)
Oil Prices $ (WTI)
140.0
120.0
100.0
80.0
60.0
40.0
20.0
0.0
-20.0
2000
2001
2002
2003
2004
2005
2006
2007
2008
2009
2010
2011
2012
2013
2014
2015
2016
2017
2018
2019
2020
ECONOMICS HELP
www.economicshelp.org | Source St Louis Fed - DCOILWTICO - Nov 2021

Ölpreis Januar 2008:

Spotpreis: **40 $ / Barrel**

12-Monats Future: **60 $ / Barrel (Super Contango)**

Risikoloser Arbitragegewinn:

- kaufe physisches Öl zu 40 $ / Barrel
- miete Lagerflächen für 12 Monate
- schließe Termingeschäft ab, das Öl in 12 Monaten zum Festpreis von 60 $ / Barrel zu verkaufen
- Gewinn = 20 $ minus Lager- und Zinskosten (sog. Cost of Carry)

- in effizienten Kapitalmärkten gibt es aber keinen „Free Lunch", derartige Arbitragemöglichkeiten werden daher nach kurzer Zeit wieder verschwinden.

- konkret werden die Handelsaktivitäten zum Anstieg des Spotpreises und zu einem fallenden Futureskurs führen, bis die Differenz genau den Lager- und Zinskosten entspricht.

- mit derartigen Überlegungen können also Aussagen zum Verhältnis von Spotpreis und Futureskurs gemacht werden (insb. ohne Rückgriff auf individuelle Risikopräferenzen)

Thema dieser Vorlesung:

- Funktionsweise von Futures und Optionen

- arbitragefreie Bewertung von Futures und Optionen

1. Futures

1. Einführung

2. Handel mit Futures, insbesondere Margins und tägliche Abrechnung

3. Arbitragefreie Bewertung von Futures: Cost of Carry, Carry Trades und Reverse Carry Trades

4. Contango vs. Backwardation: Die Rolle der Convenience Yield

Termingeschäft (Forward/Future)

$t = 0$ (heute)

A und B vereinbaren die Lieferung eines Wirtschaftsgutes in $t = T$ (z.B. in 12 Monaten) zum Festpreis F_0 (z.B. F_0 = 60 $).

$t = T$ (z.B. in 12 Monaten)

Das Wirtschaftsgut wird geliefert und F_0 = 60 $ überwiesen.

Forwards vs. Futures

Forwards: Außerbörslich (over the counter OTC) gehandelte Terminkontrakte, nicht anonym

Futures: Börsengehandelte Terminkontrakte (standardisiert, z.B. Fälligkeiten am 3. Freitag im März/Juni/September/Dezember), anonym

Agrar-Terminmarktnotierungen vom 26. März 2013

Weizen MATIF €/t		
Mai 13	243,25	
Nov 13	214,75	
Jan 14	213,75	
Mrz 14	213,00	

Braugerste MATIF €/t		
Mrz 13	246,00	
Mai 13	250,00	-
Nov 13	252,00	-
Jan 14	244,00	-

MATIF = Marché de Terme International de France

(heute Euronext Paris)

<u>Contango:</u> **Futurepreis F_0 ist größer als Spotpreis S_0**

<u>Backwardation:</u> **Futurepreis F_0 ist kleiner als Spotpreis S_0**

Bestandteile von Futures-Kontrakten

- spezifische Anforderung an die Qualität des Basiswertes um einen Kontrakt mit physischer Lieferung zu erfüllen:
- z.B. Öl: Schwefelgehalt, relative Dichte ...
- z.B. Weizen: Feuchtigkeit, Besatz, Bruchkorn, Auswuchs ...

- Lieferort

- Erfüllung: Physische Lieferung oder Barausgleich

- Sicherheiten (Margins)

Kontraktspezifikationen Chicago Mercantile Exchange

(www.cmegroup.com)

Öl:	**Physische Lieferung**
Weizen:	**Physische Lieferung**
Gold:	**Physische Lieferung**
S&P 500 (Aktienindex):	**Barausgleich**
Bitcoin:	**Barausgleich** **(Referenzpreis: Durchschnittlicher Handelspreis an mehreren Kryptobörsen)**

Barausgleich (cash settlement)

Illustratives Beispiel: Ein Bauer schließt im Januar ein Termingeschäft über den Verkauf (short) von einer Tonne Weizen im September zum Festpreis von F_0 = 200 €/t ab.

=> Spotpreis bei Fälligkeit im September sei S_T = 193 €/t

=> Der Bauer erhält einen Barausgleich $F_0 - S_0$ = 7 € aus Termingeschäft zusätzlich zum Verkaufserlös von 193 €/t (insgesamt 200 €/t; bei einem Weizenpreis von 206 € müsste er dagegen 6 € an seinen Kontrahenten zahlen)

Physische Lieferung ist selten

- In der Praxis werden die meisten Kontrakte vor Fälligkeit durch entsprechendes Gegengeschäft geschlossen um physische Lieferung zu vermeiden (vgl. Hull Business Snapshot 2.1: Physische Lieferung bei einem Futures-Kontrakt auf Lebendrind).

- Dies bedeutet aber nicht zwingend, dass es sich immer um reine Spekulationsgeschäfte handelt. Der Kontrakt könnte trotzdem zu Hedging-Zwecken abgeschlossen worden sein.

Vorzeitiges Closing von Futures durch Gegengeschäft

$t = 0$ Verkauf eines Futures auf Weizen zu $F_0 = 200$ €
(Eröffnung (open) einer short Position).

$t < T$ Kurz vor Fälligkeit Kauf eines Futures zu $F_t = 193$ €
(Schließung (close) der short Position durch gegenläufige long Position).

=> am Fälligkeitstag T heben sich Kauf zu 193 € und Verkauf zu 200 € gegenseitig auf und ergeben einen Gewinn von 7 €.

Negativer Ölpreis im April 2020

- April 2020: Der im Mai fällige Öl-Kontrakt (WTI) notiert im Minus: F_t < 0 (in der Spitze bis minus 40 $, später fällige Futures notierten durchgängig im Plus) **mehr dazu↑**

- Hintergrund: Massive Beschränkungen der Weltwirtschaft wegen Corona-Pandemie.

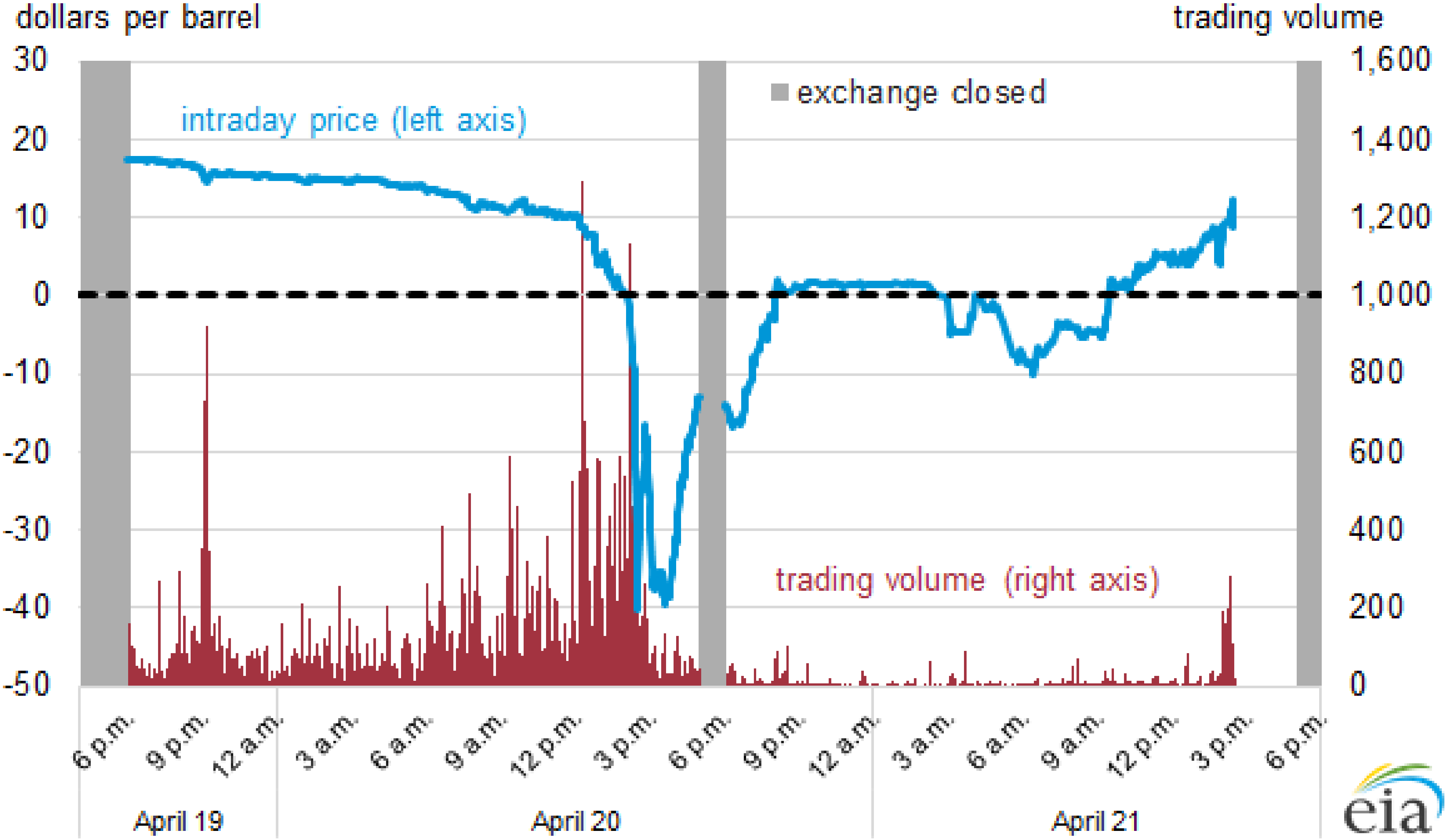
- Nachfrageschock führte zu extremen Überangebot von Öl und knappen Lagerkapazitäten.

- Der Kontrakt sah physische Lieferung im Mai 2020 vor: Inhaber einer long-Position mussten den Kontrakt also rechtzeitig (letzter Handelstag 21. April 2020) durch Verkauf schließen, um eine physische Lieferung und schwer kalkulierbare Lagerkosten zu vermeiden (link zu den Kontraktbedingungen↑).

- wer zu -40 $ einen Future kauft (Aufbau einer long-Position), erhält also Geld dafür, dass er sich verpflichtet, physisches Öl abzunehmen.

- Öl wird also wie Müll bewertet, für dessen Entsorgung ebenfalls Geld bezahlt werden muss. Dagegen sind negative Preise z.B. für Weizen oder Gold schwer vorstellbar, da man sich dieser Güter einfach entledigen kann. Bei Strom-Futures kommen aber negative Preise gelegentlich vor.

Figure 1. May 2020 West Texas Intermediate futures contract



Source: U.S. Energy Information Administration based on data from CME Group and Bloomberg, L.P.

2. Handel mit Futures, insbesondere Margins und tägliche Abrechnung

Geschichte Termingeschäfte

- historisch zuerst für Agrarprodukte

- Termingeschäfte bereits im antiken Mesopotamien (Codex Hammurapi↑ 1750 v. Chr.)

- während der Tulpenmanie↑ in den Niederlande im 17 Jh. wurden Termingeschäfte für noch nicht ausgegrabene Tulpenzwiebeln getätigt

- Reis-Börse in Osaka/Japan gegründet 1697 (existierte bis 1939) wird oft als erste organisierte Terminbörse genannt

- Öl-Futures seit 1983 als Reaktion auf Ölkrisen der 70er

Volumen des Derivatemarktes

- starkes Wachstum des Derivatemarktes durch Deregulierung („Big Bang“) seit Beginn der 1980er Jahre

- eine häufig zitierte Zahl beziffert den weltweiten Handel mit Derivaten auf 700.000 Mrd. $ (nominal, überwiegend Zinsswaps). Vergleich: Globales BIP 2023 ≈ 106.000 Mrd. $.

- siehe Statistiken der Bank für Internationalen Zahlungsausgleich (BIZ): https://www.bis.org/statistics/dataportal/derivatives.htm

- Handelsvolumen etwa von Öl-Futures heute ein Vielfaches des physischen Marktvolumens (Produktion bzw. Verbrauch)

- Aufsichtsrechtliche Regulierung der Terminmärkte wurde in den letzten Jahren immer mehr ausgeweitet:
G20 Zielvereinbarung Pittsburgh 2009 umgesetzt in der European Market Infrastructure Regulation (EMIR) 2012:

- **Zentrales Clearing für standardisierte OTC-Derivate**
- **diverse Meldepflichten**

Höhere Volatilität durch Derivate?

- Stichwort Financialization: Steigende Preise und höhere Volatilität (etwa der Nahrungsmittelpreise) wegen wachsender Terminmärkte?

- Barausgleich (Nullsummenspiel) beeinflusst die physische Nachfrage zumindest nicht direkt

- Manipulationsgefahr durch sehr große Player: *"Cornering"* *Wikipedia↑*, z.B. Aufkauf von zwei Drittel des Silberbestandes durch die Gebrüder Hunt in den 70er Jahren

- Beispiel: Zwiebel-Futures in den USA seit 1958 verboten

youtube: Why Trading Onions on Financial Markets is Illegal

Derivate: Fluch oder Segen?

- Terminmärkte ermöglichen Risikoabsicherung und können zu einem effizienteren Preisfindungsmechamnismus (F.A. Hayek 1899-1992) beitragen, da sie die Liquidität der Märkte erhöhen und zu mehr Transparenz beitragen.

- Derivate können andererseits die Erwartungen über die zukünftige Preisbildung beeinflussen und so irrationales Herdenverhalten insbesondere von reinen Finanzinvestoren begünstigen und zu Preisblasen und Marktverzerrungen führen.

Absicherungsstrategien mit Termingeschäften

- Risiko <u>fallende Verkaufspreise:</u> Absicherung durch Verkauf (short) von Futures (Landwirte, Ölproduzenten, Goldminen)

- Risiko <u>steigende Einkaufspreise:</u> Absicherung durch Kauf (long) von Futures (Getreidemühlen, Raffinerien, Flug-gesellschaften, Schmuckhersteller, Elektronikfirmen (Gold))

- Absicherung gegen Währungsschwankungen falls Einnahmen und Ausgaben in unterschiedlichen Währungen anfallen.

Hedging-Strategien in der Praxis

- Barrick Gold, weltgrößter Goldproduzent, hat sich lange Jahre gegen fallende Goldpreise abgesichert. Als der Goldpreis ab den 2000er Jahren stieg, wurde das Hedging auf Druck der Aktionäre aufgegeben vgl. Ahn 2018 S.95↑

- Der Mineralölkonzern Exxon Mobil hat in der Vergangenheit weitgehend auf Hedging verzichtet, da genügend Cash Reserven vorhanden seien, um mögliche Verluste auszugleichen Quelle: Bloomberg 2015↑

- Mexiko ist bekannt dafür, seine Öleinnahmen auf den Terminmärkten abzusichern. Quelle: Reuters 2019↑

Theoretische Überlegungen zum Hedging

Irrelevanztheorem von Modigliani/Miller: Anleger bestimmen ihr Risikoexposure unabhängig von den Finanzierungs- und Hedgingentscheidungen der Unternehmen. (Aktionär einer Goldmine kann sich durch den Verkauf von Futures gegen fallende Goldpreise absichern)

=> kein Mehrwert für Aktionäre durch Absicherungs-strategien

=> setzt jedoch reibungslos funktionierende Kapitalmärkte ohne Transaktionskosten voraus.

Vorteile des Hedging auf Unternehmensebene

- mögliche Kostenverteile auf Unternehmensebene beim Abschluss von Termingeschäften

- bei eingeschränkten steuerlichen Verlustverrechnungs-möglichkeiten Steuervorteile durch Glättung der jährlichen Gewinne

- geringere Schwankungen der Gewinne ermöglicht Innenfinanzierung von antizyklischen Investitionen

- Absicherungsstrategien reduzieren das Insolvenzrisiko

Nachteile des Hedging auf Unternehmensebene (1)

- die Anteilseigner können ihr Portfolio mit weniger Aufwand diversifizieren als ein Unternehmen

- Management komplexer Hedging-Strategien kann auf Kosten des operativen Geschäftes gehen.

- falls höhere Einkaufspreise 1:1 an die Kunden weiter-gegeben werden können, ist Hedging überflüssig und würde bei fallenden Einkaufspreisen zu vermeidbaren Verlusten führen (vgl. dazu Hull 3.2).

Nachteile des Hedging auf Unternehmensebene (2)

- sehr große Unternehmen würden durch Absicherungs-strategien die Terminpreise beeinflussen, d.h. es ist fraglich ob überhaupt eine Absicherung zu fairen Konditionen möglich ist.

- Kosten für Absicherungsstrategien werden eventuell anders bilanziert bzw. von den Aktionären anders beurteilt als etwa Versicherungsprämien, obwohl beide der Risiko-reduzierung dienen.

Margin Calls

- Damit die Handelsteilnehmer jederzeit ihren Verpflichtungen nachkommen können, verlangen die Terminbörsen die Stellung ausreichend hoher Sicherheiten (Margin Requirements).

- Im Fall von Verlusten sind die Handelsteilnehmer zu Nachschüssen verpflichtet (Margin Calls), andernfalls wird die Position unmittelbar liquidiert.

Der Mechanismus der täglichen Abrechnung (Hull 2.4)

- Kauf von 2 Gold Future Kontrakten (1 Kontrakt = 100 Unzen) zum Kurs von 1.250 $ je Feinunze.
- Initial Margin = 6.000 $ je Kontrakt => insgesamt 12.000 $ müssen mindestens auf dem Margin-Konto sein
- Maintenance Margin 4.500 $ je Kontrakt => Margin Call, falls Saldo < 9.000 $
- der tägliche Gewinn/Verlust ergibt sich aus der Differenz des Settlement Preises zum Vortag mal Kontraktwert 100 mal 2 Kontrakte

Day	Trade price ($)	Settlement price ($)	Daily gain ($)	Cumulative gain ($)	Margin account balance ($)	Margin call ($)
1	1,250.00				12,000	
1		1,241.00	−1,800	−1,800	10,200	
2		1,238.30	−540	−2,340	9,660	
3		1,244.60	1,260	−1,080	10,920	
4		1,241.30	−660	−1,740	10,260	
5		1,240.10	−240	−1,980	10,020	
6		1,236.20	−780	−2,760	9,240	
7		1,229.90	−1,260	−4,020	7,980	4,020
8		1,230.80	180	−3,840	12,180	
9		1,225.40	−1,080	−4,920	11,100	
10		1,228.10	540	−4,380	11,640	
11		1,211.00	−3,420	−7,800	8,220	3,780
12		1,211.00	0	−7,800	12,000	
13		1,214.30	660	−7,140	12,660	
14		1,216.10	360	−6,780	13,020	
15		1,223.00	1,380	−5,400	14,400	
16	1,226.90		780	−4,620	15,180	

Kontrollrechnung

- Einstiegskurs 1.250 $ - Ausstiegskurs 1.226,90 $ = 23,10 $

- Verlust: 23,10 $ * Kontraktwert 100 * 2 Kontrakte = 4.620 $

- Gesamte Einzahlungen auf das Margin-Konto:

12.000 $ + 4.020 $ (Margin Call) + 3.780 $ (MarginCall) = 19.800 $

- Schlusssaldo Margin-Konto: 15.180 $

- Verlust: 19.800 $ - 15.180 $ = 4.620 $ ok

Stimmen Forward- und Future-Kurse überein?

(vgl. Hull 5.8 und Business Snapshot 5.2)

- börsengehandelte Futures werden täglich, OTC Forward Kontrakte dagegen erst bei Fälligkeit abgerechnet.

- frühere Verbuchung ergibt einen Zinsvor- oder -nachteil, je nachdem ob es sich um Gewinne oder Verluste handelt.

- sind Gewinne und Verlust gleich wahrscheinlich, dann werden sich die Zinsvor- und -nachteile weitgehend gegenseitig aufheben; man kann daher unterstellen:

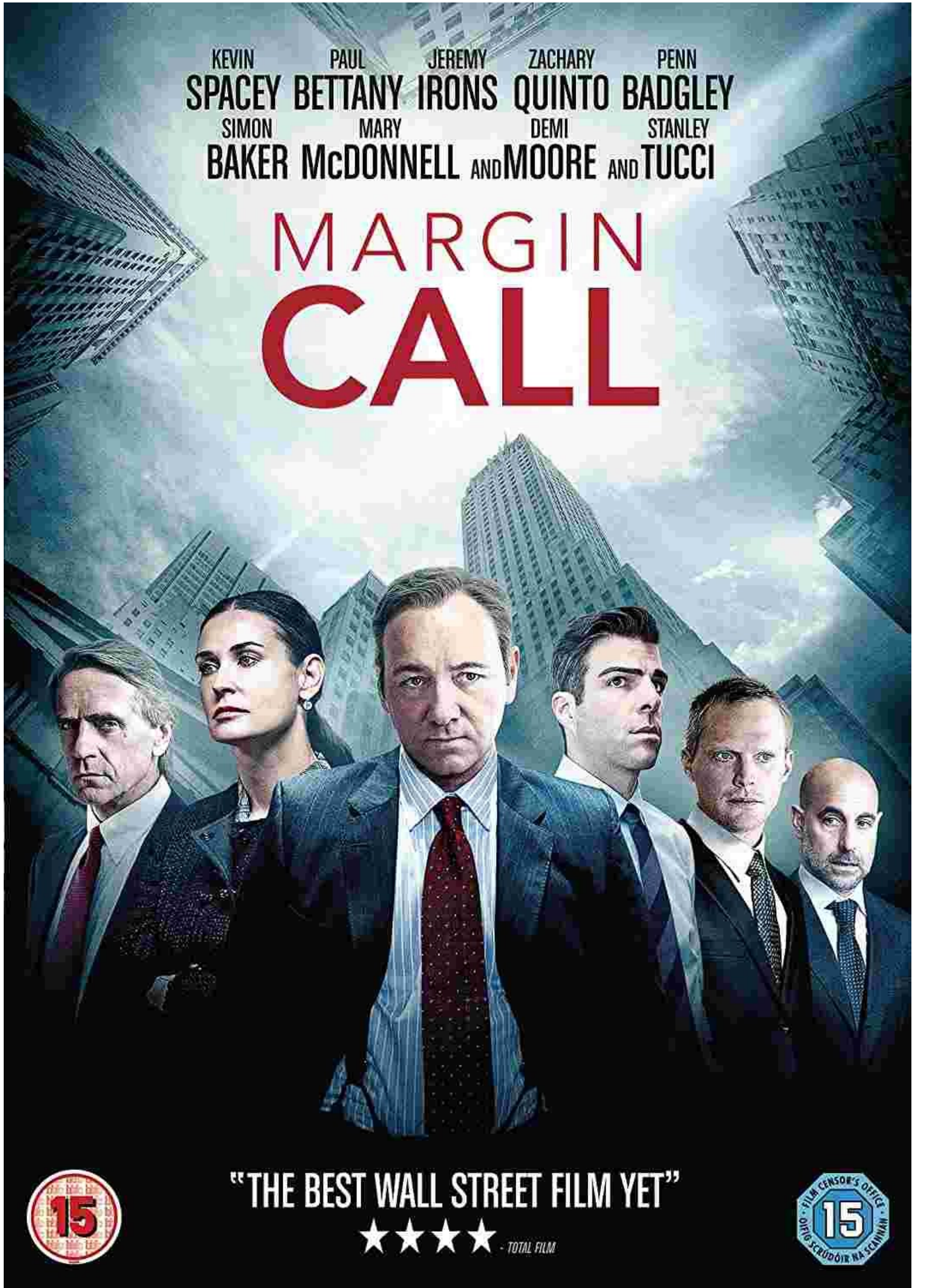
Future Preis ≈ Forward Preis

Margin-Calls können krisenverschärfend wirken

- Margin-Calls können zu einem plötzlichen sehr hohen Liquiditätsbedarf führen und zwar auch dann, wenn die Derivate rein zu Absicherungszwecken gehalten werden.

- Gashändler sichern sich z.B. gegen fallende Gaspreise ab, indem sie Gas auf Termin verkaufen (short). 2022 sind die Gaspreise wegen des Ukraine-Krieges aber stark gestiegen.

- Im Herbst 2022 musste die Bank of England Notkäufe am Anleihemarkt mehrfach ausweiten, da Margin-Calls wegen steigender Zinsen eine Systemkrise auszulösen drohten.


KEVIN SPACEY PAUL BETTANY JEREMY IRONS ZACHARY QUINTO PENN BADGLEY
SIMON BAKER MARY McDONNELL AND DEMI MOORE AND STANLEY TUCCI
MARGIN CALL
"THE BEST WALL STREET FILM YET"
★★★★ - TOTAL FILM
15
15

3. Arbitragefreie Bewertung von Futures: Cost of Carry, Carry Trades und Reverse Carry Trades

Carry Trade (dividendenlose Aktie)

- Aktienkurs S_0 = 40 €,
- 3-Monats-Future F_0= 43 €,
- Zins i = 4% (1% pro Quartal)

Aktion heute (t = 0)

- Kreditaufnahme 40 €
- Aktienkauf zu S_0 = 40 €
- Kauf eines 3-Monats-Future mit F_0 = 43 €

Aktion in 3 Monaten (t = T)

- Future wird fällig, Verkauf der Aktie zu F_0 = 43 €
- von dem Erlös werden 40,40 € (40 € + 1%) für die Kreditrückzahlung verwendet

=> risikoloser Gewinn durch "Carry Trade": 2,60 €

Für den Gewinn p aus einem Carry Trade gilt:

$$p = F_0 - S_0 (1 + i)^T$$

In arbitragefreien Märkten sind Carry Trades nicht profitabel. Aus $p \leq 0$ folgt:

$$F_0 \leq S_0 (1 + i)^T$$

- Stetiger Zins: Zinszahlungen nicht zu diskreten Zeitpunkten (monatlich, quartalsweise, jährlich), sondern kontinuierlicher, ununterbrochener Zufluss (vgl. Hull 4.2).

- Konsequenz: Aufzinsungsfaktor lautet e^{rT} statt $(1 + i)^T$, mit r = stetiger Zins und Eulersche Zahl $e = 2,718$ …

Beispiel: $r = 3\%$, $T = 0,5$ Jahre => $e^{0,03*0,5} = 1,0151$

Es folgt:

$$F_0 \leq S_0 e^{rT}$$

Futures auf Einkommen generierende Assets

- es sei nun angenommen, dass das entsprechende Wirtschaftsgut Einkommen generiert (z.B. Dividenden)

- wird dieses Einkommen verzinslich angelegt, dann erhöht sich der Profit aus dem Carry Trade und dieser ist bereits bei einem niedrigerem Futureskurs F_0 Profitabel.

- als mathematische Vereinfachung wird angenommen, dass das betreffende Asset eine stetige, kontinuierlich fließende Rendite generiert.

Prozentuale stetige Rendite

- Annahme: Stetige Rendite wird kontinuierlich in den Zukauf weiterer Güter reinvestiert.

- bei einer Rendite q multipliziert sich die Anzahl der Güter im Portfolio bis zum Ende der Laufzeit mit e^{qT}

- wird antizipierend in $t = 0$ eine entsprechend höhere Anzahl an Futures verkauft, dann ist der Profit aus dem Carry Trade:

$$p = F_0 \, e^{qT} - S_0 \, e^{rT}$$

Aus $p \leq 0$ folgt jetzt:

$$F_0 \leq S_0 \, e^{(r-q)T}$$

Lagerkosten

- Rohstoffe generieren keine Erträge, sondern verursachen Lagerkosten

- Lagerkosten *u* können als negative Erträge *q = - u* interpretiert werden, so dass folgende <u>Ungleichung</u> gilt:

$$F_0 \leq S_0 e^{(r + u)T}$$

- die Summe *r + u* aus Zins- und Lagerkosten wird als <u>Cost of Carry</u> bezeichnet.

1989 – 2004	Lagerkosten (US-$/Monat)	Lagerkosten p.a. (%)
Rohöl (WTI)	0,40/Barrel	22,05
Heizöl	3,00/Tonne	22,05
Aluminium	7,80/Tonne	6,31
Gold	0,004/Unze	0,01
Weizen	3,33/Bushel	11,91
Mais	2,00/Bushel	9,97

Tabelle 1: Geschätzte Lagerkosten ausgewählter Rohstoffe (1989 – 2004)

Quelle: LEWIS ET AL. (2007), S. 32.

Entnommen aus: Kern 2010, S. 33↑

Elektrizität: Lagerkosten = ?

Future-Preise beim Crash Oktober 1987

„Trading on Black Monday was chaotic. … By late afternoon, the S&P 500 Index futures were selling at a 25-point, or 12 percent, discount to the spot market, a spread that previously was considered inconceivable.“

Quelle: Siegel, J.J. (2002): Stocks for the Long Run, S. 266, vgl. auch Hull Business Snapshot 5.4

=> Arbitragemöglichkeit?

- bisher wurde eine obere Grenze für den Futureskurs abgeleitet.

- es stellt sich die Frage, ob und unter welchen Bedingungen der Futureskurs genau an dieser Grenze (dies wird als „Full Carry" bezeichnet) oder unterhalb dieser Grenze liegt.

- insbesondere im Fall von Backwardation, also Futureskurs F_0 kleiner als Spotpreis S_0, wäre der Markt nicht in Full Carry. (r-$q \geq 0$ vorausgesetzt)

Reverse Carry Trades

- Betrachte die Situation $F_0 = 38 < S_0 = 40$ (Backwardation)

- Für langfristig orientierte Investoren wie z.B. Pensionsfonds oder Versicherungen würde es sich lohnen, Aktien zum Kurs von $S_0 = 40$ zu verkaufen, den Erlös verzinslich anzulegen und gleichzeitig den Rückerwerb zu $F_0 = 38$ zu vereinbaren.

- alternativ könnten die Papiere für die Laufzeit des Future-Kontraktes an einen Hedgefonds verliehen werden, der dann die entsprechende Transaktion durchführt.

- bei solchen „Reverse“ Carry Trades trennt sich der Investor für die Laufzeit des Futures von dem entsprechenden Wirtschaftsgut, bei gleichzeitigen Rückkauf auf Termin.

- „Reverse“ Carry Trades sind nur möglich, wenn ausreichend Bestände vorhanden sind (siehe nächstes Kapitel).

- „nackte“ Leerverkäufe ohne vorherige physische Eindeckung sind keine Alternative, da die börsliche Lieferfrist zwei Bankarbeitstage beträgt (USA 1 Tag). Bei längerer Lieferfrist hätte man es dagegen wieder mit einem originären Termingeschäft (Forward-Kontrakt) zu tun.

Zwischenergebnis

Annahme: „Reverse“ Carry Trades sind möglich

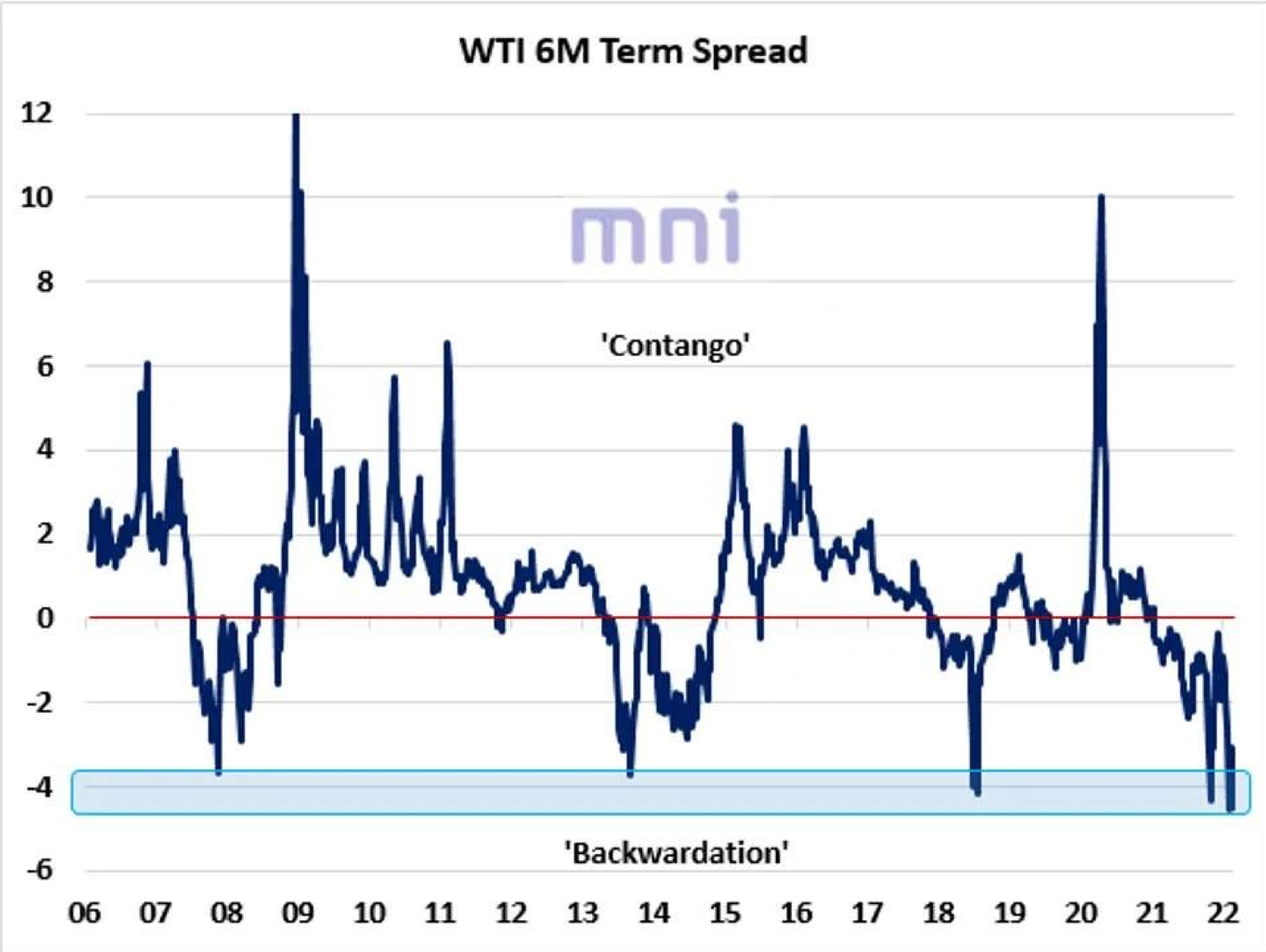
$F_0 > S_0 e^{rT}$ (super contango) => **Carry Trade vorteilhaft**

$F_0 < S_0 e^{rT}$ (kein full carry) => **„Reverse“ Carry Trade vorteilhaft**

=> **Arbitragefreiheit:** $\boxed{F_0 = S_0 e^{rT}}$

Falls das Asset Einkommen *q* generiert: $\boxed{F_0 = S_0 e^{(r - q)T}}$

4. Contango vs. Backwardation: Die Rolle der Convenience Yield



WTI 6M Term Spread
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
mni
'Contango'
'Backwardation'
06
07
08
09
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22

- die Grafik zeigt den zeitlichen Verlauf der Differenz (Spread) zwischen 6-Monats-Terminkurs und Spotpreis (bzw. ersatzweise dem nächstfälligen Terminkurs)

- positiver Spread bedeutet Contango, negativer Spread Backwardation

- man erkennt Super-Contango 2008/2009 (Finanzkrise) und 2020 (Corona-Pandemie)

- außerdem zeigt sich, dass der Markt längere Zeit in Backwardation ($F_0 < S_0$) verharrte.

- Backwardation ($F_0 < S_0$) ist also empirisch beobachtbar

- Backwardation impliziert wegen $F_0 \leq S_0\, e^{(r+u)T}$, dass der Markt nicht in Full Carry ist **(da $e^{(r+u)T} > 1$, außer bei stark negativen Zinsen $r < -u$)**

- Ungleichheitszeichen kann also nicht generell durch ein Gleichheitszeichen ersetzt werden.

=> Frage: Warum wird Backwardation nicht durch Reverse Carry Trade Arbitrage eliminiert?

- Beispiel: Unterstelle einen knappheitsbedingt hohen Spotpreis für Weizen

- gleichzeitig wird eine reichhaltige nächste Ernte erwartet

- Futures, die erst nach der Ernte fällig werden, werden also niedriger notieren als der aktuelle Spotpreis (also Backwardation, da nur <u>vorübergehende</u> Knappheit)

- Arbitrage durch Reverse Carry Trades ist aber nicht möglich, da keine Bestände über die nächste Ernte hinaus gehalten werden.

Eine fragwürdige Hedging-Strategie

- eine Ölraffinerie verkauft ihre Ölvorräte zum (hohen) Spotpreis

- stattdessen werden Futures zu einem (wegen Backwardation) niedrigerem Kurs gekauft (Reverse Carry Trade)

=> falls die Preise steigen, werden Futures mit Gewinn glattgestellt. Dieser Gewinn gleicht den höheren Spotpreis aus, falls man den Rohstoff wieder einkaufen muss.

Wo liegt das Risiko?

- der Futurepreis steigt nicht unbedingt gleich stark wie der Spotpreis

- wenn eine Knappheit auftritt, kann der Spotpreis extrem steigen, weil jeder sofort den Rohstoff will.

- aber später fällig werdende Futurepreise steigen vielleicht nicht genauso schnell, weil die Marktteilnehmer erwarten, dass sich die Knappheit langfristig wieder entspannt.

Beispiel:

- Spotpreis für Öl steigt von 80$ auf 120$ wegen einer Krise im Nahen Osten.

- der Futurepreis für Öl in 6 Monaten steigt aber nur von ursprünglich 75$ auf 90$, weil der Markt glaubt, dass sich das Angebot bald wieder erholen wird.

- Jetzt gibt es ein Problem: Der Rohstoff ist verkauft, und der Future deckt nicht die gesamten Kosten, um ihn zurückzukaufen.

Convenience Yield

- bei nur <u>vorübergehenden Versorgungsengpässen</u> ergibt sich demnach ein Vorteil für den physischen Besitz gegenüber dem Halten eines Futures-Kontraktes

- dieser Vorteil des physischen Besitzes wird als Convenience Yield *y* (vgl. Kaldor 1939, deutsch: Verfügbarkeits- oder Liquiditätsprämie) bezeichnet (physischer Besitz als „Real-Option“, die bei Engpässen ausgeübt werden kann)

- durch Annahme einer Convenience Yield *y* als nicht-monetärer Residualgröße kann die Ungleichung als Gleichung formuliert werden:

$$F_0 = S_0 \, e^{(r + u - y) T}$$

- anders als die Cost of Carry *r + u* ist die Convenience Yield *y* nicht in der Gewinn- und Verlustrechnung sichtbar.

- Backwardation wird durch eine Convenience Yield *y* größer als die Cost of Carry *r + u* erklärt.

Investitions- versus Konsumgüter (Hull 5.1; 5.11)..

- *Investitionsgüter* werden für Investitionszwecke dauerhaft gehalten (z.B. Wertpapiere, Fremdwährung, Gold etc.). Reverse Carry Trades sind immer möglich, da ausreichende Bestände vorhanden. Der Markt ist immer in Full Carry.

- *Konsumgüter* werden dagegen im Produktionsprozess verbraucht (z.B. Öl, Weizen). Es kann zu Knappheiten mit sehr geringen Lagerbeständen kommen. Aufgrund einer positiven Convenience Yield kann Backwardation eintreten.

Investitionsgüter

(z.B. Wertpapiere, Gold)

- ausreichende Bestände, keine Knappheiten

- Convenience Yield = 0

- Backwardation tritt nicht auf, Markt in Full Carry

Konsumgüter

(z.B. Öl)

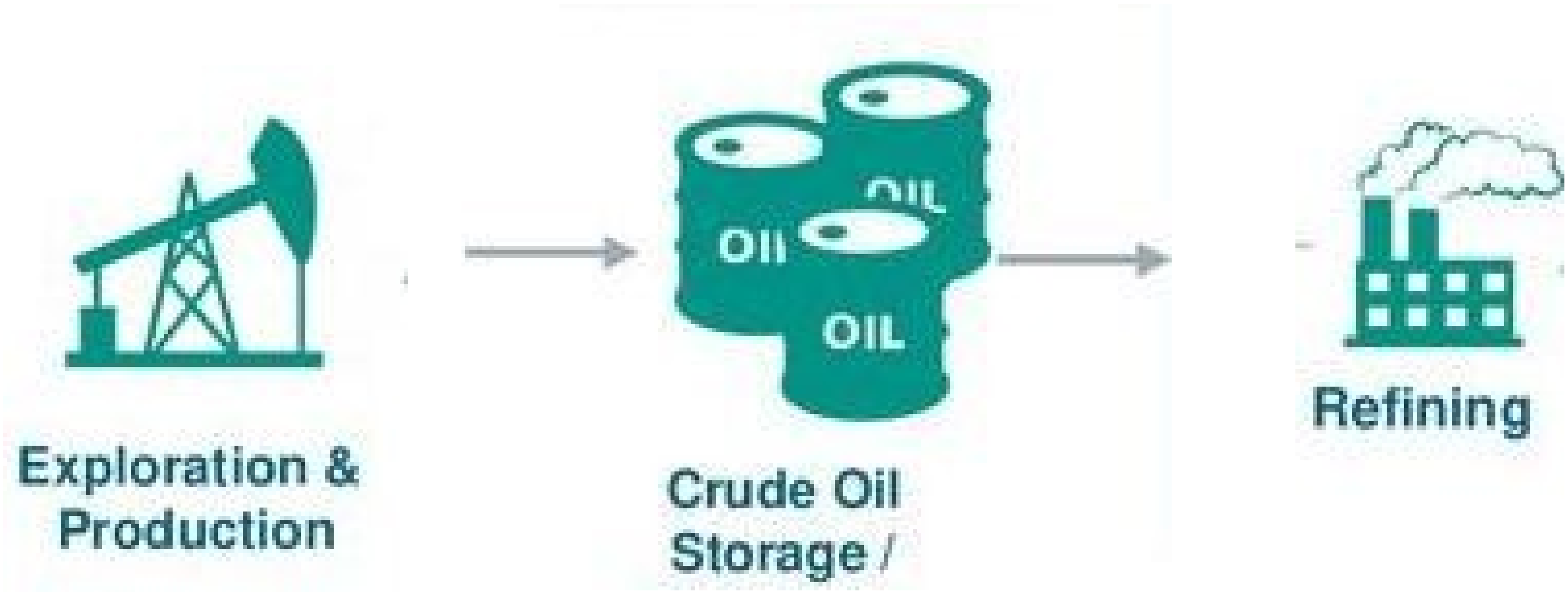
- temporäre Knappheit möglich

- Convenience Yield > 0

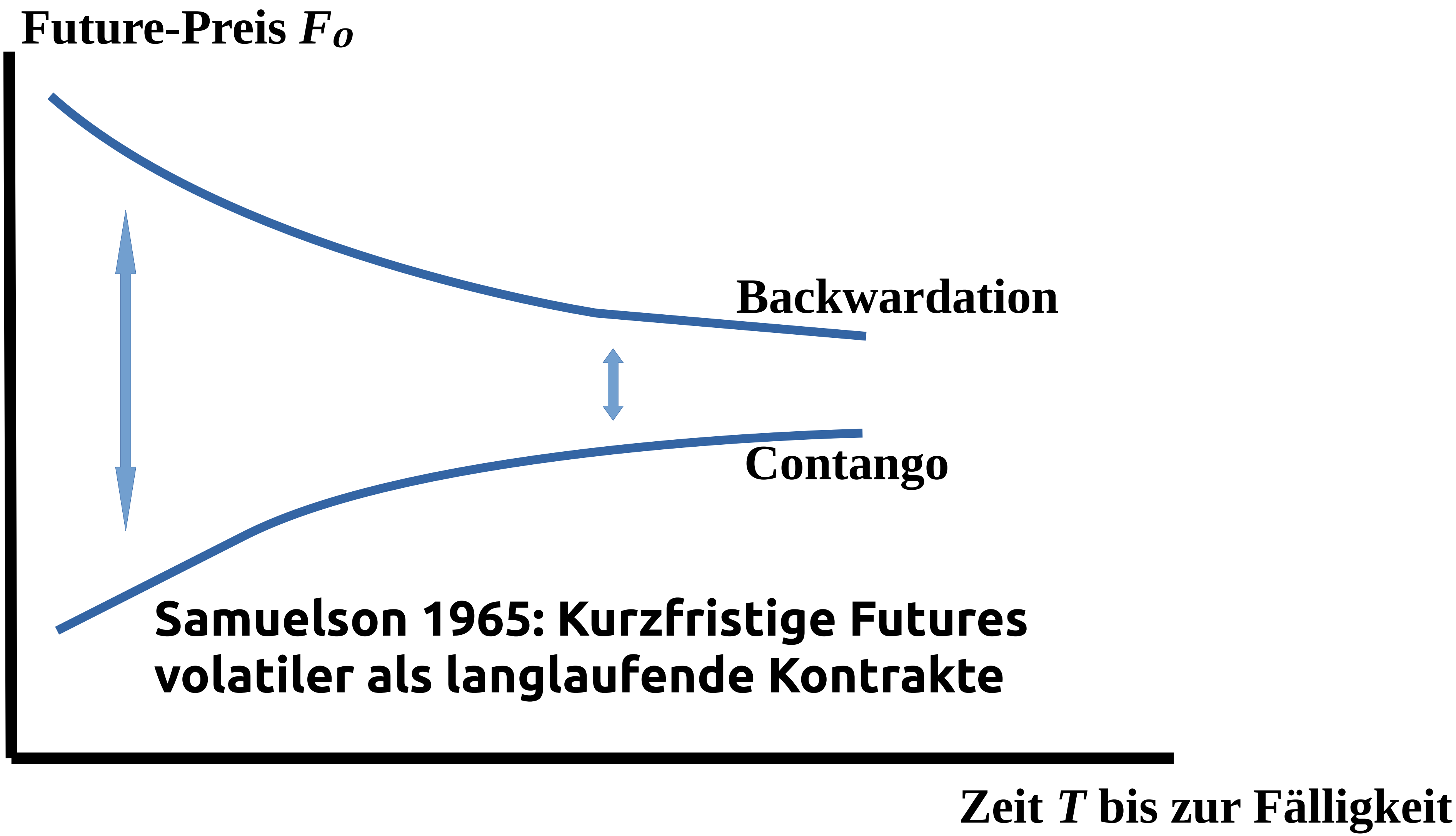
- Backwardation möglich

Investitionsgüter (z.B. Gold) werden dauerhaft gelagert

Konsumgüter (z.B. Öl) werden im Produktionsprozess verbraucht



Terminstruktur von Futures im Zeitablauf



Samuelson Hypothese

- Laut Samuelson (1965) sind kurzfristige Futures volatiler als langlaufende Kontrakte

- Begründung: Neue Informationen haben nur kurzfristige, vorübergehende Auswirkungen auf die Preisbildung (vgl. die Ausführungen zu Backwardation).

- Konsequenz: Bei steigenden Spotpreisen daher typischerweise Backwardation (langfristige Kontrakte steigen nicht so stark) und bei fallenden Preisen Contango (langfristige Kontrakte fallen weniger stark).

2. Optionen

1. Einführung

2. Amerikanische Optionen: Das Problem der vorzeitigen Ausübung

3. Delta-Hedging, Gamma-Risiko und Black-Scholes Differentialgleichung

4. Bewertung mit Binomialbäumen, insb. amerikanische Puts / Optionen auf dividendentragende Aktien

3. Ausblick: Andere Derivate, insb. Swaps

Derivate

Forwards/Futures (Terminkontrakte)

zweiseitig verpflichtend

Optionen

einseitig verpflichtend

Call / Kauf-option

Put / Ver-kaufsoption

Optionsgeschäft

t = 0 (heute)

A kauft von B für c = 12 € eine europäische Kaufoption (Call) mit Basispreis K = 90 € und Fälligkeit in 12 Monaten.

$t = T$ (in 12 Monaten)

Je nach Börsenpreis S_T erwirbt A von B den Basiswert für K = 90 € oder lässt die Option wertlos verfallen.

Optionswert = Innerer Wert + Zeitwert

Innerer Wert (Wert bei sofortiger Ausübung):

= $max\left(S_T - K, 0\right)$ **für Kaufoption (Call)**

= $max\left(K - S_T, 0\right)$ **für Verkaufsoption (Put)**

Zeitwert = ?

2. Amerikanische Optionen: Das Problem der vorzeitigen Ausübung

- *Europäische* Option: Kann nur bei Endfälligkeit ausgeübt werden.

- *Amerikanische* Option: Kann jederzeit während der Laufzeit ausgeübt werden.

=> Wann lohnt sich die vorzeitige Ausübung einer amerikanischen Option?

Eine amerikanische Kaufoption auf eine <u>dividendenlose</u> Aktie sollte nicht vor Fälligkeit ausgeübt werden (Hull 11.5)

- **letztlich egal, ob Aktie direkt oder über eine jederzeit ausübbare Option gehalten wird**

- **Basispreis möglichst spät zahlen (Zinsvorteil, zumindest falls keine Negativzinsen)**

- **Aktienkurs könnte unter Basispreis fallen**

Was gilt wenn die Aktie nach Ausübung verkauft werden soll?

- Marktpreis S_t ist der Preis, den potentielle Käufer bereit sind für die Aktie zu zahlen.

– solche Käufer würden für die nicht ausgeübte Option den inneren Wert $S_t - K$ zu zahlen bereit sein plus einen gewissen Aufschlag für den Zeitwert.

– also besser die „lebende“ Option verkaufen als diese auszuüben und anschließend die Aktie zu verkaufen

Beispiel:

- **Aktienkurs = $110**
- **Basispreis = $100**
- **Optionspreis = $15 (bestehend aus $10 innerem Wert + $5 Zeitwert)**
- **Wenn die Option zum Basispreis ausgeübt und die Aktie anschließend verkauft wird, bekommst man nur $10 Gewinn, anstatt die Option für $15 zu verkaufen!**

Formaler Beweis

Portfolio A: Besteht aus einer Option plus Cash in Höhe des abgezinsten Basiswertes $K(1+i)^{-t}$

=> Wert bei Fälligkeit der Option: $max(S_T;K)$

Portfolio B: Besteht aus einer Aktie

=> Wert bei Fälligkeit der Option: S_T (≤ Portfolio A)

> Payoff von Portfolio A ist größer/gleich dem von Portfolio B, daher gilt entsprechend für die Anschaffungskosten:

$$c_t + K(1+i)^{-t} \geq S_t$$

$$c_t \geq S_t - K(1+i)^{-t} > S_t - K$$

> Optionswert c_t also echt größer als innerer Wert der Option

> Vorzeitige Ausübung nicht lohnend (Zeitwert > Null)

Amerikanische Kaufoption auf Basiswerte mit positiven Erträgen

- wenn das Wirtschaftsgut Erträge generiert kann die vorzeitige Ausübung lohnend sein.

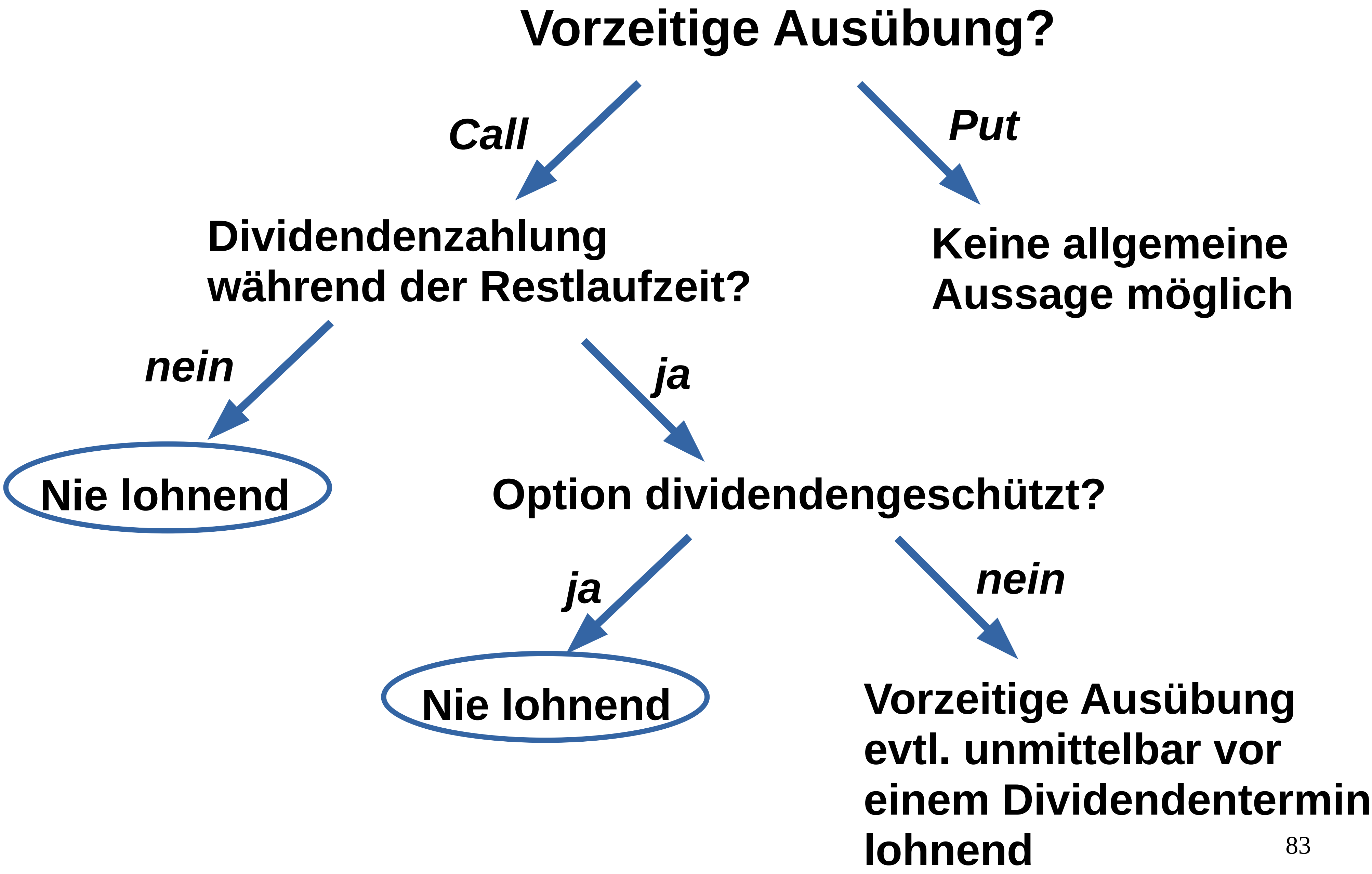
- Ausübung dann frühestens unmittelbar vor der ersten Ertragszahlung

- Optionsbedingungen können eine Anpassung der Parameter (Basispreis und/oder Kontraktgröße) vorsehen, um die Dividendenzahlung zu neutralisieren (Dividendenschutz, vgl. auch Hull 10.4).

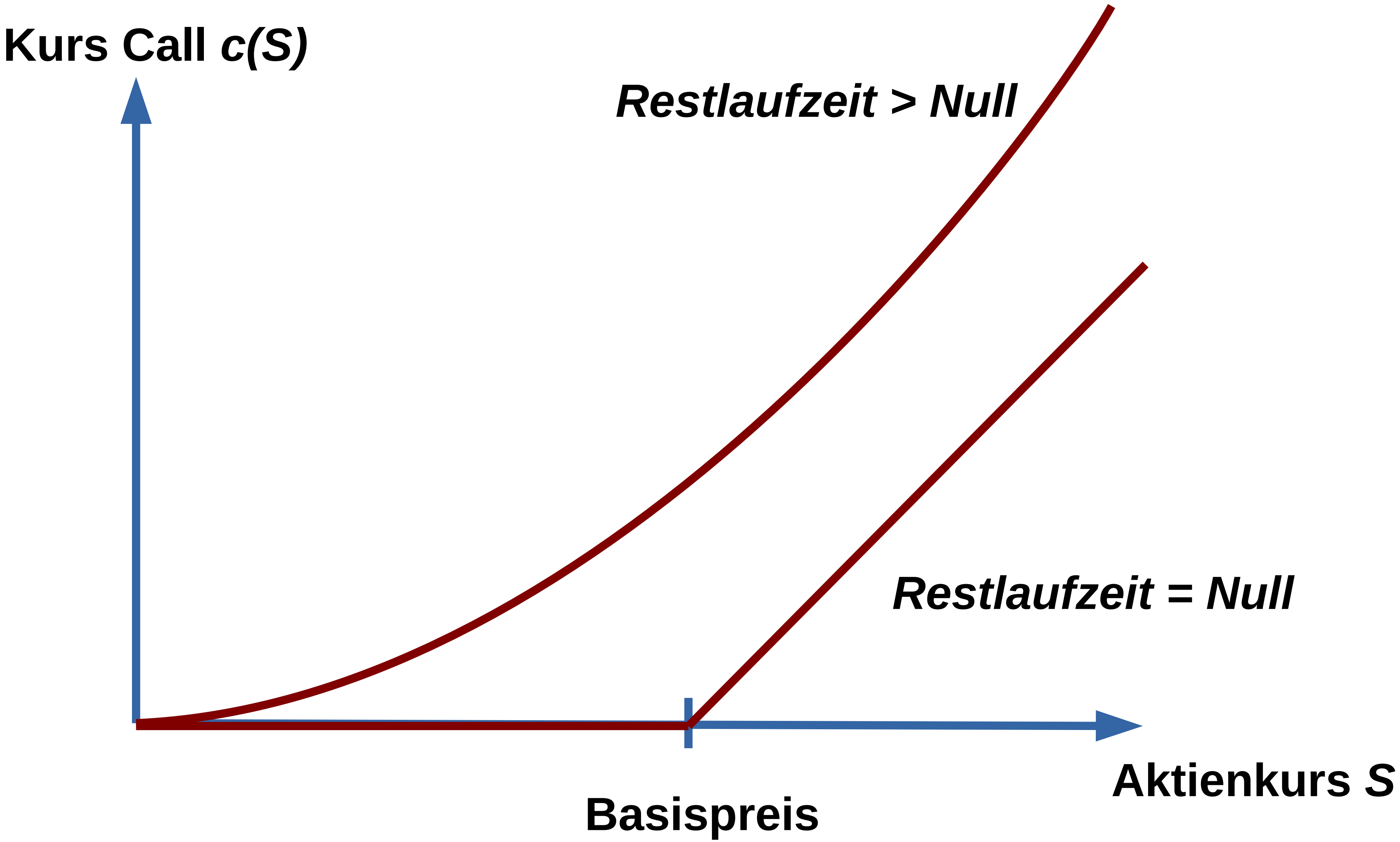
  Dann wäre trotz Dividendenzahlung eine vorzeitige Ausübung nie opportun.

Vorzeitige Ausübung eines amerikanischen Puts

- für amerikanische Puts (Verkaufsoptionen) gibt es keine allgemeine Aussage hinsichtlich der vorzeitigen Ausübung.
- wenn der Basiswert völlig wertlos geworden ist (mit Null als unterer Preisgrenze, also keine Negativpreise), lohnt sich auf jeden Fall die sofortige Ausübung.
- die vorzeitige Ausübung kann sich eventuell aber auch bereits dann lohnen, wenn der Kurs bereits sehr stark unter den Basiswert gefallen ist.


Vorzeitige Ausübung?
Call
Put
Dividendenzahlung während der Restlaufzeit?
Keine allgemeine Aussage möglich
nein
ja
Nie lohnend
Option dividendengeschützt?
ja
nein
Nie lohnend
Vorzeitige Ausübung evtl. unmittelbar vor einem Dividendentermin lohnend

3. Delta-Hedging, Gamma-Risiko und Black-Scholes Differentialgleichung

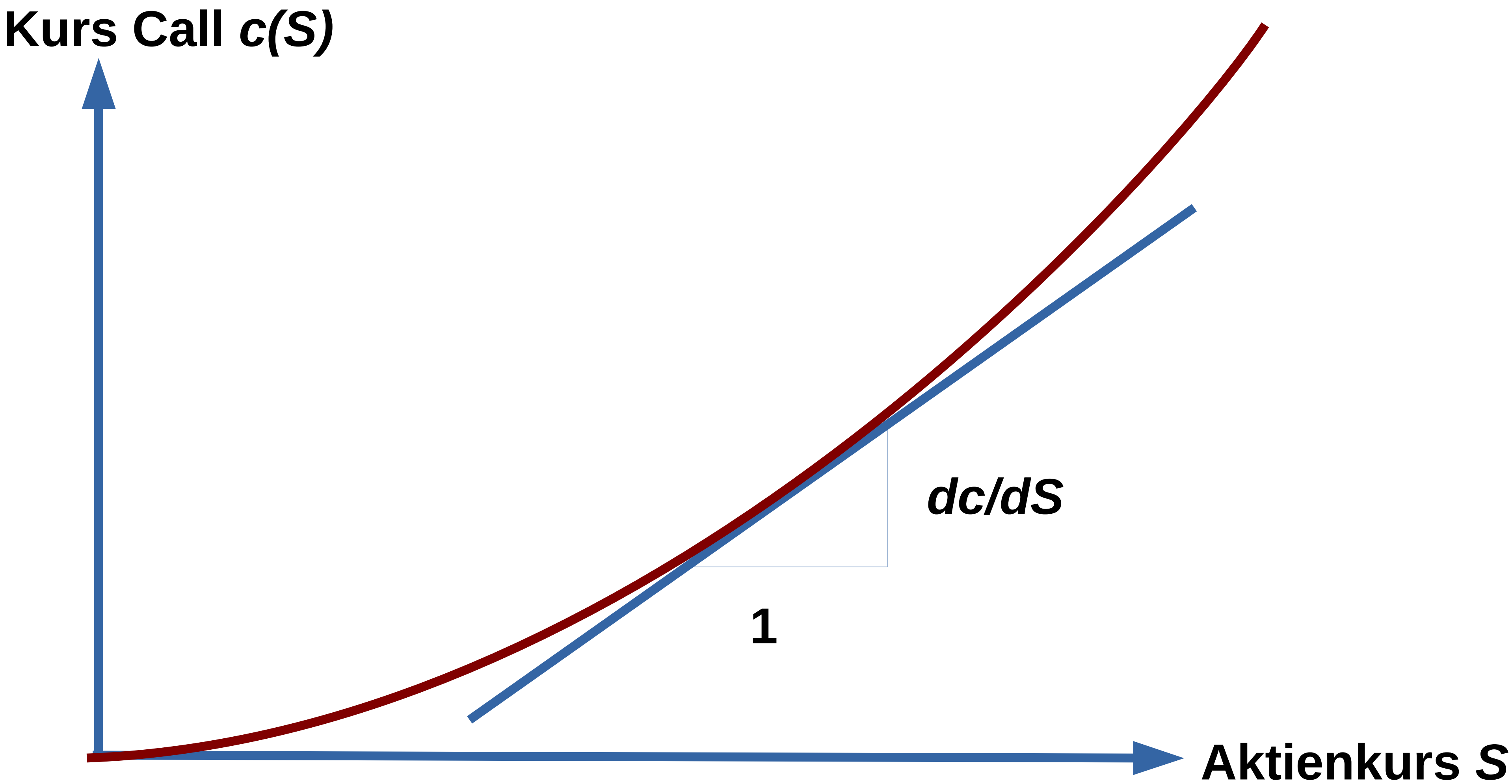

Kurs Call *c(S)*
Restlaufzeit > Null
Restlaufzeit = Null
Aktienkurs *S*
Basispreis

Delta-Hedging (Hull 19.4)

- Delta ist die erste Ableitung des Optionpreises *c(S)* nach dem Aktienkurs *S*: $\Delta = \frac{dc}{dS}$

- wenn der Aktienkurs um 1 € steigt/fällt, dann steigt/fällt der Optionspreis um Delta Δ .

- eine Option hat daher approximativ das gleiche Risiko / Chancenprofil wie ein Portfolio aus Δ Stück Aktien



Kurs Call *c(S)*
dc/dS
1
Aktienkurs *S*

Zahlenbeispiel

Aktienkurs		Optionspreis	
99		11,57	
	-1		-0,78
100		12,35	
	+1		+0,80
101		13,15	

(Annahmen: Basispreis $K = 90$, Restlaufzeit $T = 1$ Jahr, Zins $r = 0{,}5\%$ und Volatilität $\sigma = 15\% \Rightarrow \Delta = 0{,}79$)

Sei: Portfolio A: 79 Aktien

Portfolio B: 100 Optionen

=> Beide Portfolios erwirtschaften denselben Gewinn/ Verlust, wenn der Aktienkurs um $\pm$ 1 € schwankt.

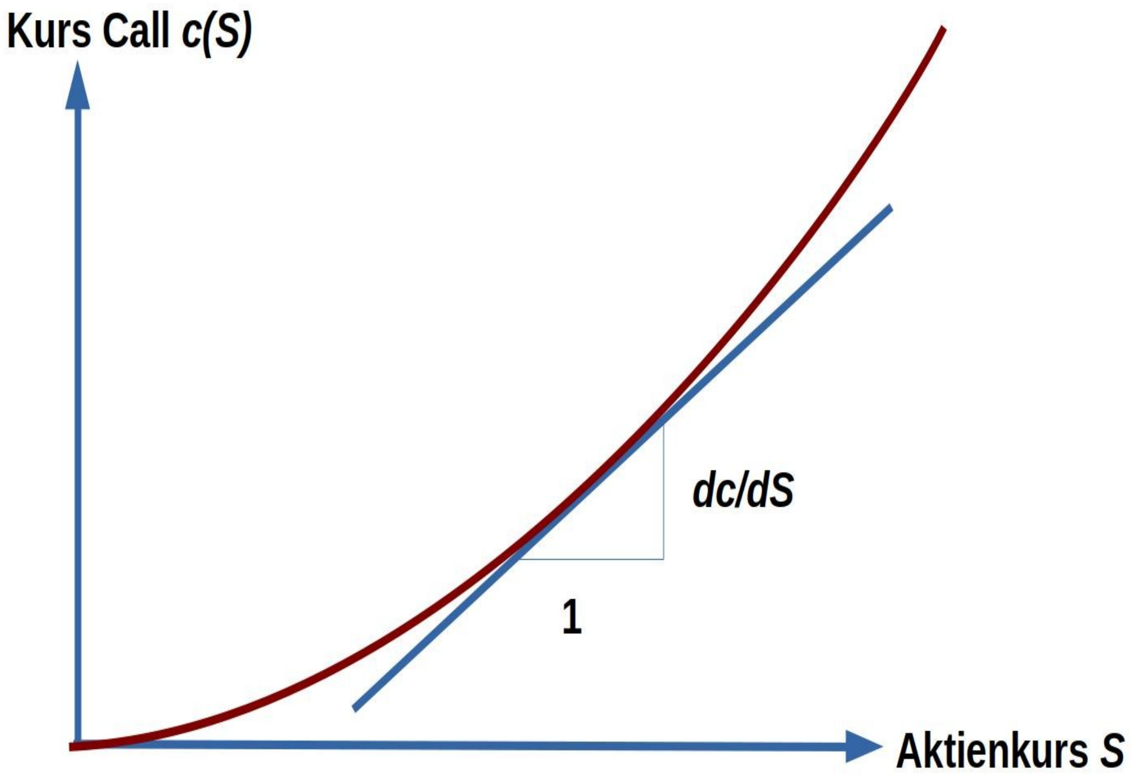
- eine solche Delta-Approximation ist ungenau, da der Optionswert ist eine konvexe Funktion des Aktienkurses *S* ist:

- bei einem Kursrückgang der Aktie von 1 € fällt der Call nur um 78 Cent

- bei einer Kurssteigerung von 1 € steigt der Call sogar um 80 Cent

=> Delta-Approximation unterschätzt die Gewinne der Option und überschätzt die Verluste.

Der Optionswert ist keine lineare Funktion des Aktienkurses. Bei sinkenden Kursen verliert die Option weniger an Wert und gewinnt bei steigenden Kursen mehr an Wert als der Basiswert (Konvexität bzw. Gamma-Risiko)



Dynamisches Delta-Hedging in der Praxis (Hull 19.4)

- eine Bank hat z.B. Call-Optionen auf die OC Oerlikon Aktie an Kunden verkauft. Die Bank fungiert also als Stillhalter.

- für die Bank negativer Marktwert in Höhe des Optionspreises, der mit steigenden Kursen zunimmt und umgekehrt.

- um dieses Risiko zu hedgen, wird die Bank für jede Option Δ Stück Aktien kaufen

- allerdings muss das Hedge-Portfolio kontinuierlich angepasst werden, da das Delta bei steigenden Kursen zunimmt und bei fallenden Kursen abnimmt.

Dynamisches Delta-Hedging und Volatilität

9. August 2007 (sda/Reuters)

Händler erklärten, der Verkaufsdruck sei von Derivaten auf die Oerlikon-Aktien verstärkt worden. ... Denn wenn die Aktie deutlich unter die Options-Ausübungskurse sinke, sei es nicht mehr notwendig, gleich viele Aktien als Absicherung zu halten. Dies löse eine Abwärtsspirale aus.

9. November 2007 (Neue Zürcher Zeitung)

Im SLI setzten die Titel von OC Oerlikon ... ihren seit drei Tagen andauernden Aufwärtstrend fort. ... Ein Analyst merkte an, es müssten Positionen aufgebaut werden, um Optionen zu hedgen.

Erwartungswert des Optionspreises:

Approximation durch Taylor-Entwicklung 2. Grades

(vgl. entsprechend auch Itô's Lemma)

$$E\{c[S(1\pm\varepsilon)]\} = c(S) \pm \underbrace{E(\varepsilon)S\frac{dc}{dS}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2}E(\varepsilon^2)S^2\frac{d^2c}{dS^2}}_{\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{d^2c}{dS^2}}$$

Zufällige Rendite ε
mit $E(\varepsilon) = 0$

Anwendung auf das Zahlenbeispiel

(*ε = ± 1%* jeweils mit Wahrscheinlichkeit 50%)

$$E(c) = \frac{c(99)+c(101)}{2} = \frac{11{,}57+13{,}15}{2} = 12{,}36 > 12{,}35 = c(100)$$

=> Mittelwert der Optionswerte für Aktienkurse *S* = 99 und *S* = 101 ist größer als der Optionswert für *S* = 100.

=> Option profitiert von der Volatilität des Aktienkurses, da sich Gewinne und Verluste nicht vollständig aufheben.

=> nachteilig für die Option ist dagegen, dass der Zeitwert im Zeitverlauf kontinuierlich abnimmt, d.h. $dc/dt<0$

Vorteilhaftigkeitsvergleich für das Halten der Option versus des Haltens des Delta-Hedge-Portfolios aus $\Delta = \frac{dc}{dS}$ Stück Aktien:

- **Eingesparte Finanzierungskosten:** $r\,S\,\frac{dc}{dS}$
- **Finanzierungskosten Option:** $-\,r\,c$
- **Kontinuierlicher Wertverlust der Option:** dc/dt
- **Vorteil aus der Konvexität:** $\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{d^2 c}{dS^2}$

Black-Scholes-Merton Differentialgleichung (Hull 15.6)

Wegen Arbitragefreiheit muss die Summe der Terme gleich Null sein (diese Differentialgleichung gilt für beliebige Derivate):

$$rS\frac{dc}{dS} - rc + \frac{dc}{dt} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2c}{dS^2} = 0$$

vgl. Black 1989, Black/Scholes 1973, Merton 1973

Fisher Black (1938 – 1995)
Nobelpreis 1997:
Myron Scholes (*1941), Robert C. Merton (*1944)

Frühe Wegbereiter:
Louis Bachelier (1870-1946), Vinzenz Bronzin (1872–1970)

Black-Scholes-Merton Bewertungsformel (Hull 15.8)

Speziell für einen europäischen Call auf eine dividendenlose Aktie mit Auszahlungsprofil $max(S_T - K, 0)$ ergibt sich eine explizite Lösung der Differentialgleichung:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

mit:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Dabei ist:

S_0 = Kurs des Basiswertes zum Bewertungszeitpunkt $t = 0$

$N(x) = P(X < x)$ = kumulative Verteilungsfunktion für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable X

K = Basispreis bzw. Bezugspreis

r = stetiger Zinssatz

T = Zeit (in Jahren) bis zur Fälligkeit (z.B. T = 1/4)

σ = Volatilität des Underlying (z.B. σ = 30% = 0,3)

Volatilität σ

- Volatilität einzige Einflussgröße des Optionspreises, die in der Realität nicht direkt beobachtbar ist.
- Modell unterstellt konstante Volatilität, tatsächlich kann sich diese im Zeitablauf ändern (Heteroskedastizität): Z.B. schlagartige Erhöhung der Volatilität zu Beginn der Corona-Pandemie.
- historische Volatilität wird aus Vergangenheitsdaten berechnet; implizite Volatilität wird aus Optionspreisen ermittelt und reflektiert Erwartungen über zukünftige Volatilität (VDAX misst die implizite Volatilität.)
- siehe auch: https://www.boerse-frankfurt.de/wissen/handeln/volatilitaet

Bewertung europäischer/amerikanischer Calls/Puts

Europäischer Call:	**Black-Scholes-Merton Formel**
Amerikanischer Call:	**Gleicher Wert wie europäischer Call, da das Recht auf vorzeitige Ausübung nie ausgeübt wird (zumindest bei einer dividendenlosen Aktie, sonst numerische Verfahren)**
Europäischer Put:	**Bewertung über Put-Call-Parität**
Amerikanischer Put:	**Numerische Verfahren**

„Greeks“ (Sensitivitätskennzahlen)

„Delta“	1. Ableitung nach dem Aktienkurs S: $\dfrac{dc}{dS}$
„Gamma“	2. Ableitung nach dem Aktienkurs S: $\dfrac{d^2c}{dS^2}$
„Rho“	Ableitung nach dem Zins r: $\dfrac{dc}{dr}$
„Theta“	Ableitung nach der Zeit t: $\dfrac{dc}{dt}$
„Vega“	Ableitung nach der Volatilität σ: $\dfrac{dc}{d\sigma}$

4. Bewertung mit Binomialbäumen, insb. amerikanische Puts / Optionen auf dividendentragende Aktien

Beispiel:	Investition in $t = 0$	Payoff f_d „down"-Szenario	Payoff f_u „up"_ Szenario
Aktie:	- 340	300	400
Anlage/Kredit zu 10%:	- 100	110	110
1 Aktie und 273 € Kredit:	- 340 + 273 = - 67	300 - 273*1,1 = 0	400 - 273*1,1 = 100
-1 Aktie (Leerverkauf) u. 364 € Geldanlage:	340 - 364 = - 24	-300 + 364*1,1 = 100	-400 + 364*1,1 = 0
Call mit Basis 350:	?	0	50

Zusammenfassung

Portfolio A: 1 Aktie und 273 € Kredit:

Investitionssumme: 67 €

Payoffs: f_{down} = 0 € und f_{up} = 100 €

=> 1 Euro im „up"-Szenario kostet 67 Cent

Portfolio B: -1 Aktie (Leerverkauf) und Geldanlage 364 €

Investitionssumme: 24 €

Payoffs: f_{down} = 100 € und f_{up} = 0 €

=> 1 Euro im „down"-Szenario kostet 24 Cent

- Option erzielt 50 € im „up“-Szenario und 0 € im „down“-Szenario => Optionspreis 50 * 0,67 + 0 * 0,24 = 33,5 €

- für ein beliebiges Derivat mit Payoff f_u im „up“-Szenario und f_d im „down“-Szenario gilt:

$$f = 0{,}67 f_u + 0{,}24 f_d = \frac{0{,}74 f_u + 0{,}26 f_d}{1{,}1}$$

Beispiele:

- **Aktie (f_{up} = 400 €; f_{down} = 300 €):**

$$f = \frac{0{,}74 \cdot 400 + 0{,}26 \cdot 300}{1{,}1} = 340$$

- **Geldanlage (f_{up} = 110 €; f_{down} = 110 €):**

$$f = \frac{0{,}74 \cdot 110 + 0{,}26 \cdot 110}{1{,}1} = 100$$

- **Option (f_{up} = 50 €; f_{down} = 0 €):**

$$f = \frac{0{,}74 \cdot 50 + 0{,}26 \cdot 0}{1{,}1} = 33{,}6$$

Allgemeine Bewertungsformel (Berechnung von *p*, Hull 13.1)

- Aktie steigt von S_0 entweder auf $S_0\,u$ oder fällt auf S_0 d, wobei $u > 1$ und $d < 1$

- (stetiger) risikoloser Zins r

- dann lautet die allgemeine Bewertungsformel:

$$f = \frac{p f_u + (1-p) f_d}{e^{rT}} \qquad \text{mit} \quad p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

Kontrollrechnung für fiktive W-keit *p:*

- hier: $S_0 = 340$, $S_0 u = 400$ und $S_0 d = 300$,

also $u = \frac{400}{340}$ und $d = \frac{300}{340}$

Zusammen mit $e^{rT} = 1{,}1$ ergibt sich:

$$p = \frac{1{,}1 - \frac{300}{340}}{\frac{400}{340} - \frac{300}{340}} = \frac{1{,}1 * 340 - 300}{400 - 300} = 0{,}74$$

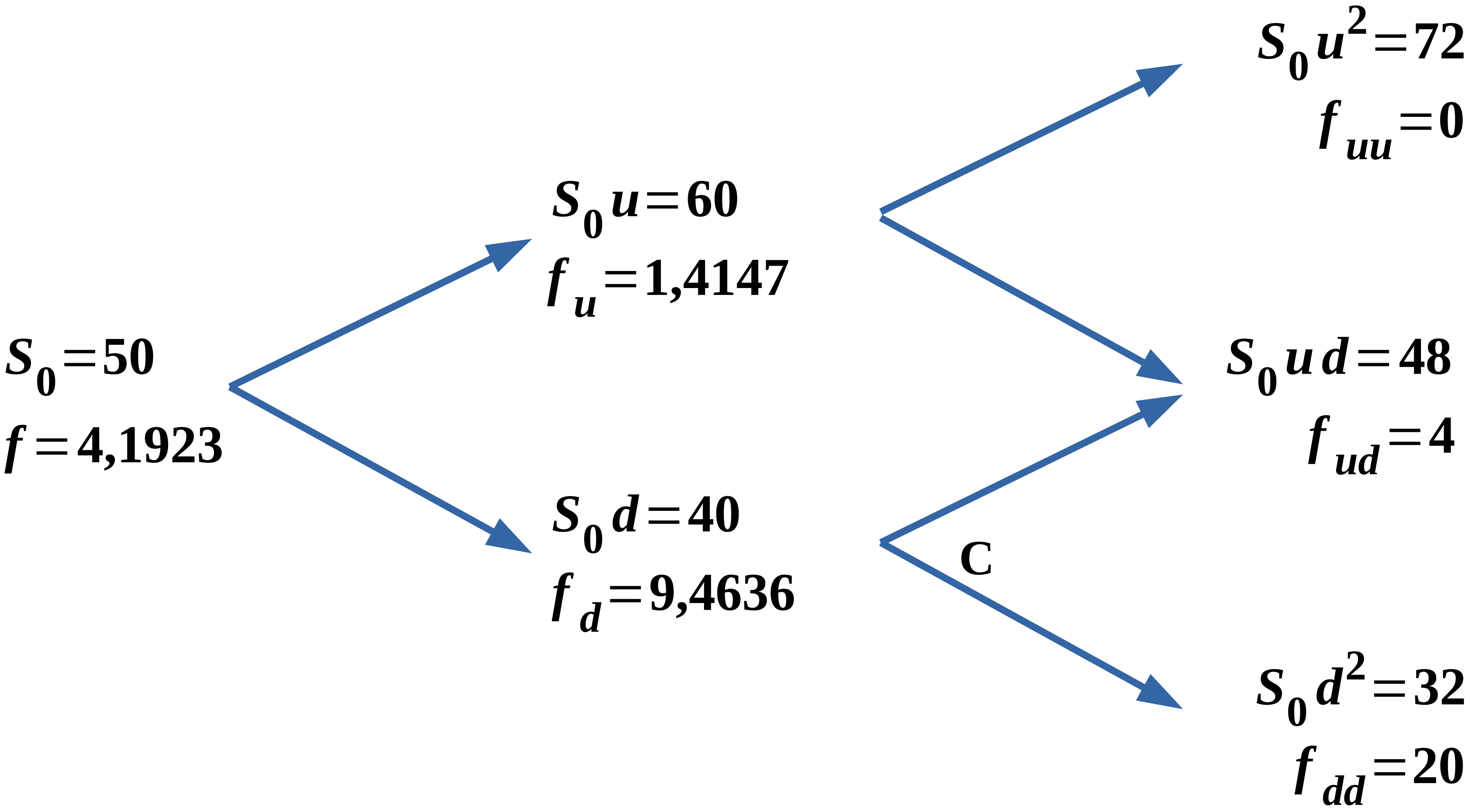
Risikoneutrale Bewertung (Hull 13.2)

- die allgemeine Bewertungsformel kann als diskontierter Erwartungswert interpretiert werden.

- die Bewertung kann also so erfolgen, „als ob“ allseitige Risikoneutralität vorliegen würde.

- beachte, dass über die tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten des up- und down-Szenarios keine Annahmen getroffen wurden. Diese müssen also nicht mit p und $1 - p$ übereinstimmen (außer es liegt allgemeine Risikoneutralität vor)

Bewertung einer <u>europäischen Put-Option</u> (*K* = 52 €)



Bewertung einer europäischen Put-Option (Hull 13.4)

- bewertet wird ein europäischer Put mit Basispreis *K* = 52 € und Restlaufzeit *T* = 2 Jahre

- der Zeitraum bis zur Fälligkeit wird in zwei Abschnitte der Länge $\Delta t = 1$ eingeteilt

- der aktuelle Aktienkurs ist $S_0 = 50$, weiterhin gilt *u* = 1,2 und *d* = 0,8 (=> Aktienkurs ± 20% je Zeitschritt) und *r* = 5%

- in den Endpunkten kann der Wert des Puts unmittelbar aus $max(52 - S_T, 0)$ berechnet werden.

- hiervon ausgehend kann sukzessive auch für alle davor liegenden Knotenpunkten der Wert des Puts berechnet werden (Rückwärtsinduktion)

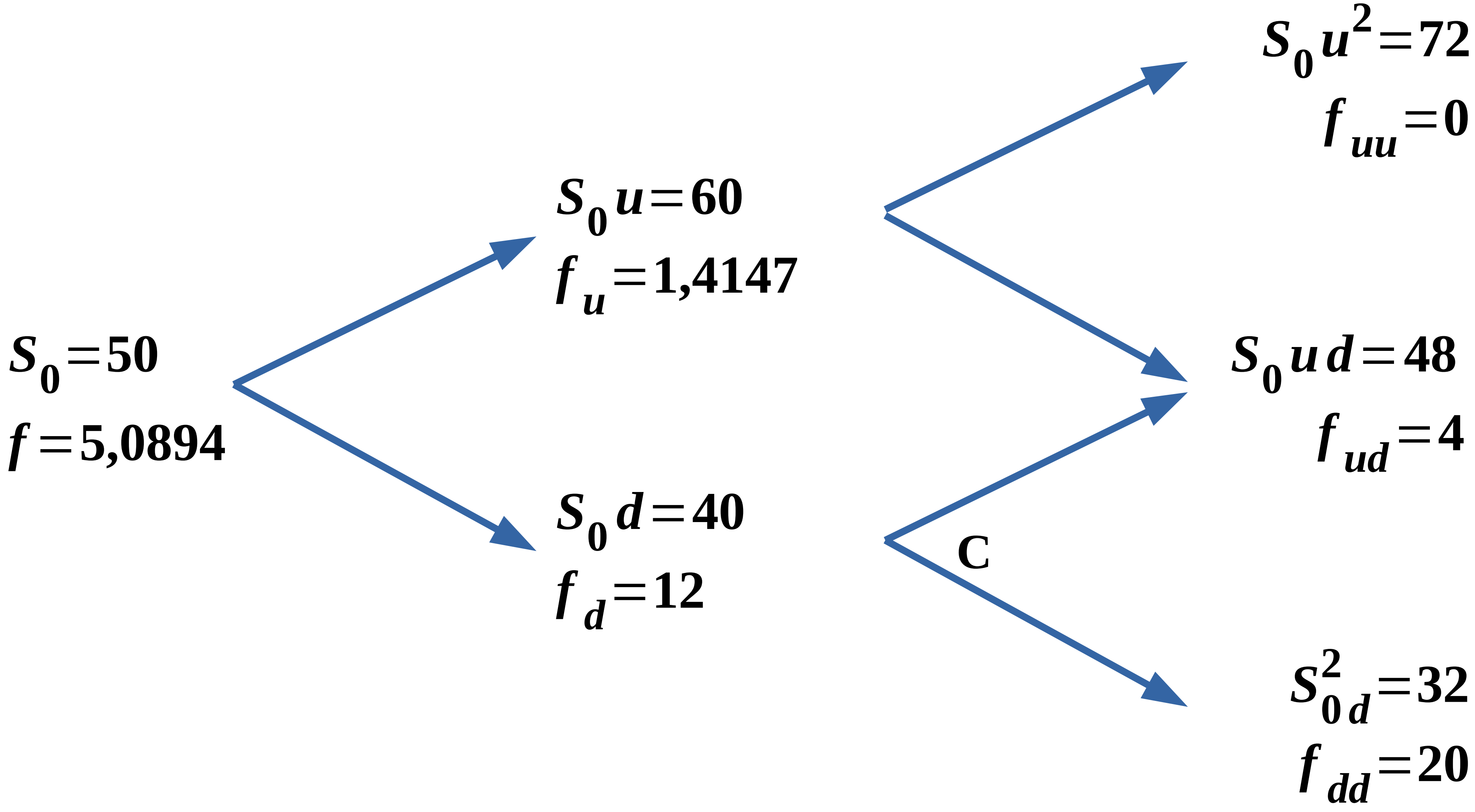
- anzuwenden dabei ist jeweils die Formel:

$$f = \frac{p f_u + (1-p) f_d}{e^{r\Delta t}} \quad \text{mit:} \quad p = \frac{e^{r \cdot \Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0{,}05 \cdot 1} - 0{,}8}{1{,}2 - 0{,}8} = 0{,}6282$$

- z.B. gilt im Knoten C: $\frac{0{,}6282 \cdot 4 + (1 - 0{,}6282) \cdot 20}{e^{0{,}05 \cdot 1}} = 9{,}4636$

- Endergebnis: Wert des europäischen Puts f = 4,1923 €

Abwandlung: <u>Amerikanische Put-Option</u> (Hull 13.5)



- würde es sich um einen amerikanischen Put handeln, dann muss in jedem Knoten überprüft werden, ob sich eine vorzeitige Ausübung eventuell lohnt.

- dies ist im Knoten C tatsächlich der Fall, da bei Ausübung $max(52-40, 0)=12$ erzielt werden können, während der Wert einer europäischen Puts in diesem Knoten nur 9,4636 beträgt.

- der Wert eines amerikanischen Puts ist also:

$$f = \frac{0{,}6282 \cdot 1{,}4147 + (1-0{,}6282) \cdot 12}{e^{0{,}05 \cdot 1}} = 5{,}0894$$

<u>Amerikanischer Call auf dividendenzahlende Aktie</u> (Hull 21.3)

- Betrachtet wird ein amerikanischer Call mit *K* = 52 €

- sei S_0 = 53,8 € und es sei bekannt dass in *t* = 1 eine Dividende von 4 € gezahlt wird.

- von den S_0 = 53,8 € entfallen $4\,e^{-0{,}05} = 3{,}8$ auf die Dividende

- für S_0^* = 50 € wird der Zufallsprozess wie oben modelliert

- im Knoten B lohnt sich die vorzeitige Ausübung, weil man sonst auf die Dividende verzichten würde. Der Wert des Calls im Knoten B wäre andernfalls: $\dfrac{0{,}6282 \cdot 20 + 0}{e^{0{,}05 \cdot 1}} = 11{,}95 < 12$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & & \begin{array}{c} 50u^2=72 \\ f_{uu}=20 \end{array} \\
 & \begin{array}{c} 50u+4=64 \\ f_u=12 \end{array} \arrow[ur] \arrow[dr, "\mathrm{B}"'] & \\
\begin{array}{l} S_0=50+3{,}8 \\ f=7{,}17 \end{array} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{array}{c} 50ud=48 \\ f_{ud}=0 \end{array} \\
 & \begin{array}{c} 50d+4=44 \\ f_d=0 \end{array} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \begin{array}{c} 50d^2=32 \\ f_{dd}=0 \end{array}
\end{tikzcd}
$$

Erhöhung der Anzahl an Zeitschritten

- der Optionswert kann immer besser approximiert werden, wenn man die Laufzeit in immer mehr Zeitschritte unterteilt.

- damit die Volatilität im Modell mit der tatsächlichen Volatilität σ der Aktie übereinstimmt, ist $u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ und $d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ zu wählen. (vgl. Cox, Ross, Rubinstein 1979)

(dabei ist bei *n* Zeitschritten, wobei die Restlaufzeit *T* der Option üblicherweise in Jahren gemessen wird und *σ* ebenfalls die Volatilität der jährlichen Renditen bezeichnet)

Übergang zum Black-Scholes-Merton-Modell

- im Grenzfall mit unendlich vielen Zeitschritte konvergiert das Modell gegen die bekannte Black/Scholes-Formel

- daher lässt sich der Wert einer Option auch als diskontierter Erwartungswert schreiben (Hull 15.8):

$$c = \frac{E[max(S_T - K, 0)]}{e^{rT}} \quad \textbf{bzw.} \quad p = \frac{E[max(K - S_T, 0)]}{e^{rT}}$$

Dabei ist S_T log-normalverteilt, d.h. der Logarithmus $\ln(S_T)$ normalverteilt mit Erwartungswert $\ln(S_0) + (r - \sigma^2/2)T$ und Varianz $\sigma^2 T$ (Hull, Anhang Kapitel 15)

3. Ausblick: Andere Derivate, insb. Swaps

- Zinsswaps

- Währungsswaps

Silicon Valley Bank März 2023: Zweitgrößte Bankpleite in der Geschichte der USA

- die Bank hatte überwiegend in langlaufende Staatsanleihen investiert

- wegen steigender Zinsen hatten die Anleihen erheblich an Wert verloren

- Verlustmeldung über 1,8 Mrd. $ löste Bank Run aus

Zinsänderungsrisiken

Barwert einer 10-jährige Anleihe mit Kupon 2% bei einem Marktzins von 2% (flache Zinskurve):

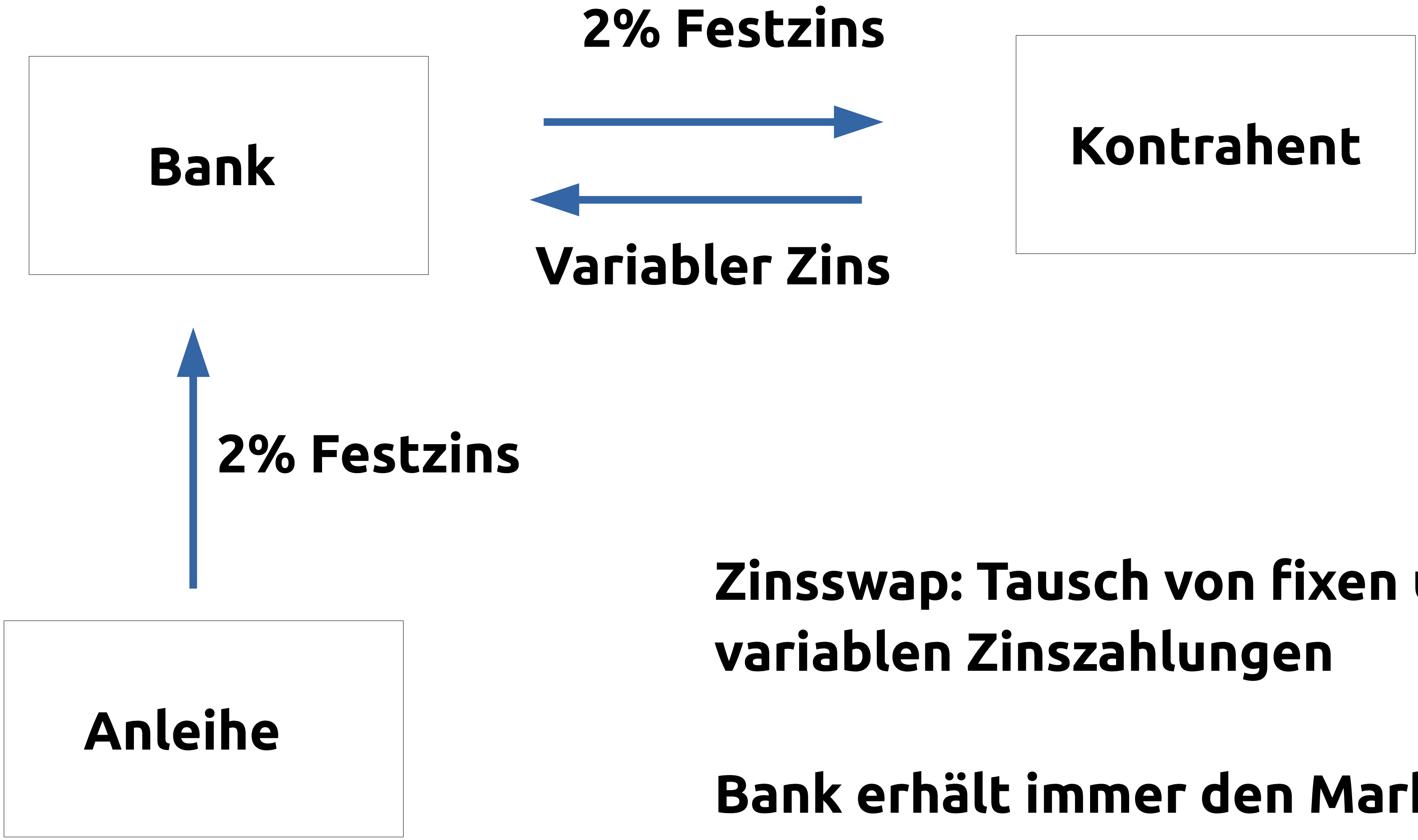
$$\frac{2}{1{,}02} + \ldots + \frac{2}{1{,}02^{10}} + \frac{100}{1{,}02^{10}} = 100$$

Barwert bei einem Marktzins von 4% (flache Zinskurve):

$$\frac{2}{1{,}04} + \ldots + \frac{2}{1{,}04^{10}} + \frac{100}{1{,}04^{10}} = 83{,}78$$

=> Verlust 16,22% wenn Marktzins von 2% auf 4% steigt

Management von Zinsänderungsrisiken mit Zinsswaps



Zinsswap: Tausch von fixen und variablen Zinszahlungen

Bank erhält immer den Marktzins

Parameter eines „plain vanilla“ Zinsswaps

- Nominalbetrag (Notional Amount) N: Der Betrag, auf den sich die Zinszahlungen beziehen

- Laufzeit (Maturity/Tenor) T, z. B. $T = 5$, 10 oder 30 Jahre

- Höhe des festen Zinssatzes (Fixed Rate)

- Referenzzinssatz (Reference Rate): z.B. Euribor, SOFR, früher LIBOR, vgl. Wikipedia↑

- Fixing and Payment Dates (z.B. alle 3, 6 oder 12 Monate)

=> zu Beginn einer Zinsperiode wird der für die folgende Periode nachschüssig zu zahlende Zins bestimmt.

Bewertung von Zinsswaps

- bei Vertragsbeginn Marktwert Null für beide Seiten

- spätere Zinsänderungen können zu einem positiven oder negativen Marktwert führen

- Marktwert (Present Value PV) des „Payer-Swaps“ (Zahler des fixen Zinssatzes)

= PV(floating leg) – PV(fixed leg)

- analog mit umgekehrten Vorzeichen für den Receiver-Swap

Bewertung der festen Seite

PV(fixed leg) = PV(feste Zinszahlungen)

- Berechnung durch Diskontierung eines gegebenen Cash Flows

- Beispiel: Restlaufzeit 15 Monate, Zinsanpassung alle 6 Monate, r_{xM} sind die am Bewertungsstichtag gültige Spotrates für eine Laufzeit von x Monaten

$$\text{PV(fixed leg)} = \frac{z_{fix}}{\left(1+r_{3M}\right)^{0,25}} + \frac{z_{fix}}{\left(1+r_{9M}\right)^{0,75}} + \frac{z_{fix}}{\left(1+r_{15M}\right)^{1,25}}$$

Bewertung der variablen Seite

$$\text{PV(floating leg)} = \text{PV(variable Zinszahlungen)}$$
$$= \text{PV(Floater)} - \text{PV(Tilgungszahlung)}$$

Floater = variabel verzinste Anleihe, Tilgung zum Nominal

a) Bewertung unmittelbar nach Zinszahlung/Zinsanpassung

$$= N - \frac{N}{(1 + r_T)^T}$$

Begründung: Marktwert des Floaters ist gleich Nominalwert, da immer zum Marktzins verzinst.

b) Bewertungsstichtag liegt zwischen zwei Zinsterminen

z* **= Höhe der Zinszahlung am nächsten Zinsanpassungs-termin (wurde am vorherigen Termin festgelegt und muss nicht mehr mit dem aktuellen Marktzins übereinstimmen)**

t **= Zeit bis zum nächsten Zinsanpassungstermin**

PV(floating leg) = PV(Floater) – PV(Tilgungszahlung)

$$= \frac{N + z^*}{(1 + r_t)^t} - \frac{N}{(1 + r_T)^T}$$

Währungsswaps

- eine Bank in Frankfurt hat ein mit 7% verzinstes Darlehen über 100 GBP (British Pounds) vergeben, dass zu pari getilgt wird

- mit einem Währungsswap könnte die Bank in Frankfurt den Kreditauszahlungbetrag von 100 GBP durch Tausch gegen 120 EUR erwerben. Hierauf erhält die Bank während der Laufzeit z.B. 5% Zinsen in Euro und leitet die 7% Zinsen in GBP an den Kontrahenten weiter. Am Ende der Laufzeit werden die Nominalbeträge wieder getauscht.

	Cashflow aus Kreditvergabe	Cashflow aus Währungsswap	
t = 0	- 100 GBP	+ 100 GBP	- 120 EUR
t = 1	+ 7 GBP	- 7 GBP	+ 6 EUR
t = 2	+ 7 GBP	- 7 GBP	+ 6 EUR
t = n	+ 107 GBP	- 107 GBP	+ 126 EUR

=> Währungsswap transformiert Zins- und Tilgungszahlungen in Fremdwährung in Zahlungen in heimischer Währung

Bewertung von Währungsswaps

- zu vergleichen sind die Barwerte eines Cashflows in heimischer und eines Cashflows in fremder Währung.

- Barwert des Cashflows in heimischer Währung:

Berechnung wie üblich durch Diskontierung

- **Barwert des Cashflows in Fremdwährung:**

  1. Methode

  Berechne den Barwert in Fremdwährung und konvertiere diesen mit dem aktuellen Devisenkurs in heimische Währung.

  2. Methode

  Jede zukünftige Zahlung in Fremdwährung wird zunächst mittels sich aus Währungsfutures ergebenden Terminkursen in heimische Währung konvertiert und danach der Barwert in heimischer Währung berechnet.

  (Beide Methode führen zum selben Ergebnis)

Literatur:

- **Ahn, D. P. (2018): Principles of commodity economics and finance, MIT Press.**
- **Black, F., M. Scholes (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. In: Journal of Political Economy. 81, 3, S. 637–654.**
- **Black, F. (1989), How We Came up with the Option Formula, The Journal of Portfolio Management, Vol. 15, Winter, S. 4-8.**
- **Cox, J. C., S. Ross, M. Rubinstein (1979): Option Pricing: A Simplified Approach. In: Journal of Financial Economics. Nr. 7, S. 229–263.**
- **Hull, J. (2015): Optionen, Futures und andere Derivate 9. Auflage**
- **Inhaltsverzeichnis: *http://d-nb.info/1075875099/04↑)***
- **Kaldor, N. (1939): Speculation and Economic Stability, in: Review of Economic Studies, vol. 7, issue 1, S. 1-27**
- **Kern, A. (2010): Commodity Futures - Enhanced Strategien zur Performancesteigerung?**
- **Lewis, M. (2007): The universe of commodity indices. Commodity Now 11, 40–46.**
- **Merton, R. C. (1973): Theory of Rational Option Pricing. In: The Bell Journal of Economics and Management Science. 4, S. 141–183.**
- **Rau-Bredow, H. (2022): Contango and Backwardation in Arbitrage-Free Futures-Markets online: *https://mpra.ub.uni-muenchen.de/111688***
- **Samuelson, P. (1965): Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly. Industrial Management Review, 6, 41-49.**