

# Portfeuilletheorie bei nicht-klassischen Risikonutzenfunktionen

## 1 Einleitung

In diesem Beitrag soll eine Theorie der optimalen Portfeuilleselektion entwickelt werden, die auf möglichst wenig restriktiven Annahmen bezüglich der individuellen Risikopräferenzen beruht. Dazu liegt der Rückgriff auf den sehr allgemeinen Ansatz von *Machina* (1982) nahe, bei dem das für die axiomatische Herleitung des herkömmlichen *Bernoulli*-Prinzips notwendige Substitutionsaxiom durch eine viel weniger einschränkende Differenzierbarkeitsbedingung ersetzt wird. Als Begründung für ein solches Vorgehen wird von *Machina* angeführt, daß die übrigen Axiome des *Bernoulli*-Prinzips lediglich die Existenz eines stetigen Präferenzfunktionals gewährleisten und somit weitgehend dem zum Beispiel auch in der mikroökonomischen Haushaltstheorie üblichen Vorgehen entsprechen<sup>1</sup>. Das Substitutionsaxiom verlangt jedoch darüber hinaus, daß das Präferenzfunktional die konkrete Gestalt des Erwartungsnutzens annimmt. Heute ist es wohl nicht mehr umstritten, daß diese spezielle Gestalt der Risikopräferenzen dem empirisch beobachteten Risikoverhalten widerspricht<sup>2</sup>.

Die von *Machina* verwendete viel schwächere Differenzierbarkeitsbedingung reicht aber bereits aus, um die Existenz einer sogenannten „lokalen“ Nutzenfunktion zu beweisen, durch deren Eigenschaften ganz analog zu einer herkömmlichen *Bernoulli*-Nutzenfunktion das Risikoverhalten beschrieben wird. Für fast alle alternativen Risikoentscheidungskalküle, die in der neueren Literatur entwickelt wurden, kann eine lokale Nutzenfunktion angegeben werden. Dies ist zum Beispiel auch für den in der Arbeit von *Weber* (1990) verwendeten Ansatz der Fall. Direkt als Sonderfall sind im *Machina*-Ansatz ebenso die klassischen  $\mu$ - $\sigma$ -Regeln enthalten, durch die das Risikoverhalten insbesondere bei der Herleitung des CAPM modelliert wird; zusätzliche Einschränkungen wie zum Beispiel ein normalverteiltes Endvermögen müssen dazu nicht vorausgesetzt werden.

Der Ansatz von *Machina* wurde bisher noch nicht auf portefeuilletheoretische Fragestellungen angewendet. In einem optimalen Portfeuille muß die Grenzrate der

- \* Dr. Hans Rau-Bredow, Stipendiat der DFG, Habilitand am Lehrstuhl für BWL, Bank- und Kreditwirtschaft, Universität Würzburg, Sanderring 2, 97070 Würzburg. In der vorliegenden Fassung dieses Beitrages konnten wesentliche Verbesserungsvorschläge eines anonymen Referenten berücksichtigt werden, dafür auch auf diesem Weg herzlichen Dank. Weitere wertvolle Hinweise und Anregungen ergaben sich auch aus den Gesprächen mit Herrn Prof. Dr. Bernd Rudolph. Verbleibende Unzulänglichkeiten gehen zu Lasten des Autors.

1 Vgl. *Machina* (1982), S. 278.

2 Zur Diskussion vgl. *Eisenführ/Weber* (1994), S. 325 ff.; *Kahneman/Tversky* (1979); *Machina* (1987); *Rau-Bredow* (1995b); *Schauenberg* (1990); *Sugden* (1986) und *Weber/Camerer* (1987).

Substitution zwischen zwei Wertpapieren (beziehungsweise den damit verbundenen Ergebnisverteilungen) mit dem exogen vorgegebenen Preisverhältnis übereinstimmen. Differenzierbarkeit ist offensichtlich die Mindestvoraussetzung an die individuellen Risikopräferenzen, um diese marginalen Substitutionsraten berechnen zu können. Es liegt daher nahe, unter Verwendung einer lokalen Nutzenfunktion Bedingungen für ein optimales Portefeuille anzugeben. Der dazu erforderliche etwas größere formale Aufwand ist wegen des wesentlich erweiterten Geltungsbereiches der abzuleitenden Aussagen gerechtfertigt. Ansätze zu einem auf diesen Ergebnissen aufbauenden umfassenden Kapitalmarktmodell mit mehreren Investoren werden ebenfalls diskutiert.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: Aufbauend auf eine knappe Darstellung der Theorie der differenzierbaren Risikopräferenzen (Abschnitt 2) werden mit Hilfe einer lokalen Nutzenfunktion Bedingungen für ein optimales Portefeuille abgeleitet (Abschnitt 3). Hieran schließen sich Überlegungen zum klassischen CAPM (Abschnitt 4) und zum Modell von Martin Weber (Abschnitt 5) an. Es folgt noch eine Zusammenfassung mit Ausblick auf mögliche weitere Forschungen.

## 2 Die Theorie der differenzierbaren Risikopräferenzen

Es wird von einem Präferenzfunktional  $U(F)$  ausgegangen, durch das die Präferenzbildung bezüglich unterschiedlicher Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $F(x) = P(X < x)$  des zukünftigen Vermögens abgebildet wird. Beim *Bernoulli*-Prinzip wird mit Hilfe einer Reihe von Axiomen, von denen insbesondere das Substitutionsaxiom umstritten ist<sup>3</sup>, die Existenz einer Nutzenfunktion  $u(x)$  bewiesen, so daß  $U(F)$  gleich dem Erwartungsnutzen  $U(F) = E_F u(x)$  sein muß. Aufgrund zahlreicher, hier nicht im einzelnen zu referierender empirischer Untersuchungen dürfte dieser Ansatz heute als falsifiziert anzusehen sein<sup>4</sup>.

*Machina* ersetzt deshalb das Substitutionsaxiom durch die Bedingung der sogenannten *Fréchet*-Differenzierbarkeit<sup>5</sup>. Dabei handelt es sich um ein geeignetes Differenzierbarkeitskonzept für auf der Menge der Verteilungsfunktionen definierte Präferenzfunktionale. Im Gegensatz zum Erwartungsnutzen ist dann die Linearität in den Wahrscheinlichkeiten nicht mehr gegeben, aber die vorausgesetzte Differenzierbarkeit erlaubt mit Hilfe einer „lokalen“, insbesondere von der Verteilungsfunktion  $F$  abhängigen Nutzenfunktion  $u(x, F)$  eine lokale Näherung durch das lineare Erwartungsnutzenmodell. Konkret kann die Differenz  $U(F) - U(F^*)$  wie folgt durch die Differenz der Erwartungsnutzen approximiert werden<sup>6</sup>:

$$U(F) - U(F^*) = \int u(x, F^*) (dF(x) - dF^*(x)) + o(\|F - F^*\|) \quad (1)$$

Dabei steht das Landausche Symbol  $o(\cdot)$  für Restterme höherer Ordnung, das heißt es gilt  $o(x)/x \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 0$ . Nach dieser Formel ergibt sich das Risikoverhalten für alle Verteilungsfunktionen  $F(x)$ , die sich gemäß der durch  $\|F - F^*\| = \int |F(x) - F^*(x)| dx$  definierten Metrik in einer Umgebung der in der lokalen Nutzenfunktion als zweites Argument eingesetzten Verteilung  $F^*$  befinden, näherungs-

weise als Maximierung des Erwartungswertes  $\int u(x, F^*) dF(x)$  bezüglich der entscheidungsabhängigen Verteilungsfunktion  $F(x)$ .

Aus ökonomischer Sicht ist nun von Bedeutung, daß in den Eigenschaften der lokalen Nutzenfunktion – ganz analog zu einer herkömmlichen *Bernoulli*-Nutzenfunktion – die Risikoeinstellung des Individuums zum Ausdruck kommt. Risikoaversion kann also mit Hilfe des verallgemeinerten *Pratt-Arrow*-Indexes der absoluten Risikoaversion –  $u''(x, F)/u'(x, F)$  gemessen werden<sup>7</sup>; bei einer als Funktion von  $x$  konkav verlaufenden lokalen Nutzenfunktion liegt daher Risikoaversion vor. Außerdem muß, damit das Dominanzprinzip beachtet wird, die lokale Nutzenfunktion eine monoton steigende Funktion von  $x$  sein<sup>8</sup>.

Tabelle 1: Lokale Nutzenfunktionen  $u(x, F)$  für einige Risikopräferenzfunktionale  $U(F)$

| $U(F) =$                                                               | Bezeichnung                                         | $u(x, F) =$                                                                                     |
|------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\int u(x) dF(x)$                                                      | <i>Bernoulli</i> -Prinzip                           | $u(x)$                                                                                          |
| $U(\mu, \sigma)$                                                       | $\mu$ - $\sigma$ -Prinzip                           | $\frac{\delta U}{\delta \mu} x + \frac{\delta U}{\delta \sigma} \frac{x^2 - 2\mu x}{2\sigma}$   |
| $U(M_1, \dots, M_n)$<br>mit $M_k = E(x^k)$                             | Klassische Entscheidungsregel mit höheren Momenten  | $\sum_{k=1}^n (\delta U / \delta M_k) x^k$                                                      |
| $U(\mu, r)$ mit<br>$r = \int e^{c(x-\mu)} dF(x)$                       | Wert/Risiko-Ansatz von Weber (1990)                 | $\frac{\delta U}{\delta \mu} x + \frac{\delta U}{\delta r} [e^{c(x-\mu)} - xcr]$                |
| $\int u(x) dw(F(x))$                                                   | Rangplatzabhängige Nutzentheorie von Quiggin (1982) | $\int_0^x u'(t) w'(F(t)) dt$                                                                    |
| $\frac{\int v(x) dF(x)}{\int w(x) dF(x)}$                              | Ratio-Form                                          | $[v(x) - U(F)w(x)]/\bar{w}$<br>mit $\bar{w} = \int w(t) dF(t)$                                  |
| $\int u(x) + D[u(x) - \bar{u}]dF(x)$<br>mit $\bar{u} = \int u(t)dF(t)$ | Disappointment Theorie von Loomes/Sugden (1986)     | $u(x) (1 - \bar{D}) + D[u(x) - \bar{u}]$<br>mit $\bar{D} = \int \bar{D}' [u(t) - \bar{u}]dF(t)$ |

In Tabelle 1 ist für einige Risikoentscheidungskalküle die zugeordnete lokale Nutzenfunktion angegeben<sup>9</sup>. Bei diskreten Verteilungen  $w = (w_1, \dots, w_n)$  ist ein heuristischer Ansatz zur Berechnung der lokalen Nutzenfunktion durch partielle Ableitung nach den einzelnen Wahrscheinlichkeiten  $w_i$  möglich:  $u(x, w) = \delta U(w)/\delta w_i$ . Dies folgt direkt aus der dann geltenden, zu Gleichung (1) analogen Näherung von  $U(w) - U(w^*)$  durch  $\sum (\delta U(w^*)/\delta w_i) (w_i - w_i^*)$ .

7 Vgl. *Machina* (1982), S. 299 f.

8 Vgl. *Machina* (1982), S. 296.

9 Vgl. dazu im einzelnen *Rau-Bredow* (1995 b). Für die rangplatzabhängige Nutzenfunktion wurde das Ergebnis von *Quiggin* (1991), S. 241, und für die Disappointment Theorie das von *Loomes/Sugden* (1986), S. 277, übernommen. Eine weitere, nicht ganz deckungsgleiche Tabelle findet man bei *Machina* (1983), S. 274 f.

3 Vgl. bereits *Allais* (1953).

4 Vgl. den Überblick bei *Machina* (1982), S. 280 ff., und die in Fußnote 2 angegebene Literatur.

5 Vgl. *Machina* (1982), S. 293 f.

6 Vgl. *Machina* (1982), S. 294.

Zur Illustration soll mit diesem heuristischen Ansatz die einem beliebigen  $\mu$ - $\sigma$ -Präferenzfunktional zugeordnete lokale Nutzenfunktion berechnet werden.

Wegen  $\mu = \sum x_i w_i$  und  $\sigma = \sqrt{\sum x_i^2 w_i - (\sum x_i w_i)^2}$

$$\frac{\delta U(\mu, \sigma)}{\delta w_i} = \frac{\delta U}{\delta \mu} \frac{\delta \mu}{\delta w_i} + \frac{\delta U}{\delta \sigma} \frac{\delta \sigma}{\delta w_i} = \frac{\delta U}{\delta \mu} x_i + \frac{\delta U}{\delta \sigma} \frac{x_i^2 - 2\mu x_i}{2\sigma} \tag{2}$$

Dieses Ergebnis ist auch für stetige Verteilungen gültig, für  $x = x_i$  erhält man das in *Tabelle 1* angegebene Ergebnis<sup>10</sup>. Als Funktion von  $x$  verläuft die lokale Nutzenfunktion quadratisch. Außerdem ist die lokale Nutzenfunktion noch von den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$  abhängig, hierin kommt der Einfluß der in das zweite Argument eingesetzten Verteilungsfunktion  $F$  zum Ausdruck. Für das spezielle Präferenzfunktional  $U(\mu, \sigma) = a\mu + b(\mu^2 + \sigma^2)$  ergibt sich dagegen die herkömmliche, von der Verteilungsfunktion  $F$  unabhängige *Bernoulli*-Nutzenfunktion  $u(x) = ax + bx^2$ . Dies entspricht genau der Vereinbarkeit von  $\mu$ - $\sigma$ -Regeln und *Bernoulli*-Prinzip bei quadratischen Nutzenfunktionen.

Die erste Ableitung nach  $x$ , die unten auch bei der Herleitung des CAPM benötigt wird, lautet:

$$u'(x, F) = \frac{\delta U(\mu, \sigma)}{\delta \mu} + \frac{\delta U(\mu, \sigma)}{\delta \sigma} \frac{x - \mu}{\sigma} \tag{3}$$

Ohne irgendeine Einschränkung der zulässigen Verteilungen kann die Positivität dieser Ableitung und damit eine monoton in  $x$  steigende lokale Nutzenfunktion nicht garantiert werden. Gegen die  $\mu$ - $\sigma$ -Regeln ergibt sich also der Einwand, daß Dominanzverstöße nicht ausgeschlossen werden können<sup>11</sup>.

Abschließend soll noch für eine beliebige  $\mu$ - $\sigma$ -Regel der Risikoaversionsindex berechnet werden:

$$-\frac{u''(x, F)}{u'(x, F)} = \frac{-1}{\sigma \frac{\delta U}{\delta \mu} + \frac{\delta U}{\delta \sigma} (x - \mu)} \tag{4}$$

Ein positiver Index und damit Risikoaversion ergibt sich für  $\delta U/\delta \sigma < 0$  und  $u'(x, F) > 0$ . Die Risikoaversion ist um so größer, je kleiner absolut genommen die Grenzrate der Substitution zwischen Standardabweichung  $\sigma$  und Erwartungswert  $\mu$  ausfällt.

### 3 Optimale Portefeuilles bei differenzierbaren Risikopräferenzen

Es wird ein Individuum betrachtet, das sein Vermögen  $W$  auf  $n$  Finanzierungstitel verteilen will, wobei die späteren Rückflüsse der einzelnen Wertpapiere durch die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  gegeben sind. Der Preis des Wertpapiers  $i$  ist  $p_i$ , die Anteile des Individuums an den einzelnen Wertpapieren werden mit  $a_i$  bezeichnet. Das Problem besteht darin, das Präferenzfunktional  $U(G)$  als Funktion der

mit  $G(x)$  bezeichneten Verteilungsfunktion der gesamten Rückflüsse  $\sum_{i=1}^n a_i X_i$  zu maximieren<sup>12</sup>:

$$\text{Max: } U(G) \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^n a_i p_i = W \tag{5}$$

Die Lagrangefunktion zu diesem Problem lautet:

$$L = U(G) + \lambda (\sum a_i p_i - W) \tag{6}$$

Um durch partielle Ableitung nach den einzelnen Anteilen  $a_i$  Bedingungen erster Ordnung angeben zu können, muß zunächst die partielle Ableitung  $\delta U(G)/\delta a_i$  berechnet werden. Im mathematischen Anhang wird dazu folgendes Ergebnis bewiesen:

$$\frac{\delta U(G)}{\delta a_i} = E[u'(\sum a_k X_k, G) X_i] \tag{7}$$

Bei der Bildung des Erwartungswertes sind also für jeden Umweltzustand die Rückflüsse des Portefeuilles  $\sum a_k X_k$  zu berechnen, in die erste Ableitung der lokalen Nutzenfunktion einzusetzen und mit den jeweiligen Realisationen von  $X_i$  zu multiplizieren. Für herkömmliche *Bernoulli*-Funktionen ist das Ergebnis durch partielle Ableitung von  $U(G) = E u(\sum a_k X_k)$  nach  $a_i$  direkt plausibel. Wenn eine lokale Nutzenfunktion verwendet wird, dann ist außerdem die Verteilungsfunktion  $G(x)$  des Portefeuilles im zweiten Argument einzusetzen.

Mit (7) und (6) ergibt sich aus der notwendigen Bedingung  $\delta L/\delta a_i = 0$  für alle  $i$ :

$$E[u'(\sum a_k X_k, G) X_i] + \lambda p_i = 0 \tag{8}$$

Es sei nun unterstellt, daß sich durch eine Linearkombination der Wertpapiere eine risikofreie Anlage  $X_f = \sum b_k X_k$  mit Preis  $p_f = \sum b_k p_k$  zusammenstellen läßt. Hierin ist natürlich auch der Spezialfall enthalten, daß ein einzelnes Wertpapier eine solche risikolose Anlagemöglichkeit repräsentiert. Aus Gleichung (8) erhält man durch Multiplikation mit  $b_i$  und anschließende Summation über alle  $i$ :

$$E[u'(\sum a_k X_k, G) X_f] + \lambda p_f = 0 \tag{9}$$

Eliminierung von  $\lambda$  aus (9) und (8) ergibt, wenn die Rendite  $1 + r = X_f/p_f$  für risikolose Anlagen verwendet wird:

$$p_i = \frac{1}{1 + r} \frac{E[u'(\sum a_k X_k, G) X_i]}{E[u'(\sum a_k X_k, G)]} \tag{10}$$

Damit konnte folgende Bedingung für ein optimales Portefeuille abgeleitet werden: Der diskontierte und gewichtete Erwartungswert von  $X_i$  muß mit dem Preis  $p_i$  des Wertpapiers  $i$  übereinstimmen. Dabei sind bei der Erwartungswertbildung Zustände, in denen der anhand der ersten Ableitung der lokalen Nutzenfunktion  $u'(\sum a_k X_k, G)$  zu berechnende Grenznutzen des gesamten Portefeuilles groß ist, stärker zu gewichten als Zustände, in denen dieser Grenznutzen gering ist.

10 Für einen Beweis vgl. *Rau-Bredow* (1992), S. 163.  
 11 Beispiele dazu findet man bei *Copeland/Weston* (1988), S. 99 ff.; *Laux* (1991), S. 161 ff., und *Schneeweiß* (1968).

12 Zur Vereinfachung der Notation wird hierbei die Abhängigkeit der Verteilungsfunktion  $G(x)$  von den Anteilen  $a_1, \dots, a_n$  unterdrückt.

Bisher wurde Vollständigkeit des Wertpapiermarktes nicht vorausgesetzt. Ein vollständiger Markt ist gegeben, wenn  $n$  Wertpapiere bei entsprechend  $n$  möglichen Umweltzuständen stochastisch linear unabhängig sind. In einem vollständigen Markt kann die Analyse zu einem State-Preference-Ansatz<sup>13</sup> vereinfacht werden. Es wird dann davon ausgegangen, daß die Zufallsvariablen  $X_i$  jeweils genau im mit Wahrscheinlichkeit  $w_i$  eintretenden Umweltzustand  $i$  den Wert Eins annehmen und sonst immer gleich Null sind. Gleichung (10) vereinfacht sich dann zu:

$$P_i = \frac{1}{1+r} \frac{u'(a_i^*, G) w_i}{\sum_k u'(a_k^*, G) w_k} \tag{11}$$

Dieses Ergebnis wird auch von *Franke/Hax* angegeben<sup>14</sup>. Es läßt sich offensichtlich verallgemeinern, indem *Bernoulli*-Nutzenfunktionen durch lokale Nutzenfunktionen vom *Machina*-Typ ersetzt werden.

Die bisherige Ableitung bezieht sich auf einen einzelnen Investor, der bei gegebenen Preisen optimal disponiert. Im Gleichgewicht eines Kapitalmarktes mit mehreren Marktteilnehmern sind die Preise  $p_i$  dagegen nicht mehr exogen vorgegeben, sondern modellendogen so zu bestimmen, daß auch die Markträumungsbedingungen erfüllt sind. Die Markträumungsbedingungen besagen, daß für jedes Wertpapier die Summe aus den sich für die verschiedenen Marktteilnehmer ergebenden Anteilen  $a_i^*$  mit dem gesamten Angebot des Wertpapiers  $i$  übereinstimmen muß. Die schwierige Frage nach hinreichenden Bedingungen für ein solches globales Gleichgewicht soll hier offenbleiben. Da jeder Investor im Gleichgewicht optimal disponiert, ist in einem solchen Kapitalmarktmodell auch die Bedingung (10) für ein optimales Portefeuille jeweils gültig, wenn auf der rechten Seite die lokalen Nutzenfunktionen und das optimale Portefeuille eines bestimmten Anlegers eingesetzt werden.

#### 4 Zur Herleitung des CAPM

Im folgenden soll die Bedingung (10) für ein optimales Portefeuille entsprechend der Wertpapiermarktlinie umgeformt werden, ohne zunächst die lokale Nutzenfunktion zu spezifizieren. Um die Grundgleichung des CAPM zu erhalten, ist anschließend in einem weiteren Schritt die einer  $\mu$ - $\sigma$ -Regel zugeordnete lokale Nutzenfunktion einzusetzen.

Multipliziert man (10) mit  $-(1+r)$  und addiert anschließend auf beiden Seiten  $E(X_i)$ , dann erhält man mit  $X^* = \sum_k X_k$  unter Verwendung der Kovarianz:

$$E(X_i) - p_i (1+r) = - \frac{\text{Cov}[X_i, u'(X^*, G)]}{E u'(X^*, G)} \tag{12}$$

Durch Multiplikation mit den Anteilen  $a_i^*$  und anschließender Summation über alle  $i$  folgt außerdem mit  $p^* = \sum_k p_k$ :

$$E(X^*) - p^* (1+r) = - \frac{\text{Cov}[X^*, u'(X^*, G)]}{E u'(X^*, G)} \tag{13}$$

Division von (12) durch (13) ergibt mit den Renditen  $1 + R_i = X_i / p_i$  und  $1 + R^* = X^* / p^*$ :

$$\frac{E(R_i) - r}{E(R^*) - r} = \frac{\text{Cov}[R_i, u'(X^*, G)]}{\text{Cov}[R^*, u'(X^*, G)]} \tag{14}$$

Diese Charakterisierung eines optimalen Portefeuilles formuliert einen Zusammenhang zwischen der Rendite  $R_i$  eines einzelnen Wertpapiers  $i$  und der Rendite  $R^*$  des gesamten Portefeuilles, der immer dann gültig ist, wenn die Risikopräferenzen die vorausgesetzte allgemeine Differenzierbarkeitsbedingung erfüllen. Dabei ist das „Beta“ auf der rechten Seite gleich dem Quotienten aus den Kovarianzen der Renditen jeweils mit dem Grenznutzen des gesamten Portefeuilles. Dieser Grenznutzen  $u'(X^*, G)$  berechnet sich aus der lokalen Nutzenfunktion des Investors, so daß dieser Renditezusammenhang im allgemeinen von den individuellen Risikopräferenzen des betrachteten Anlegers abhängig ist.

Im folgenden sei nun angenommen, daß der betrachtete Investor seine Entscheidungen an einer  $\mu$ - $\sigma$ -Regel ausrichtet. Die dem Präferenzfunktional  $U(\mu, \sigma)$  zugeordnete Nutzenfunktion verläuft dann quadratisch in  $x$ , so daß sich für die Ableitung  $u'(x, F)$  gemäß Gleichung (3) eine lineare Funktion ergibt, deren Koeffizienten bei der Berechnung der Kovarianzen als Konstanten zu betrachten sind und wegfallen beziehungsweise gekürzt werden können. Substitution von (3) in (14) ergibt nun:

$$\frac{E(R_i) - r}{E(R^*) - r} = \frac{\text{Cov}(R_i, X^*)}{\text{Cov}(R^*, X^*)} = \frac{\text{Cov}(R_i, R^*)}{\text{Var}(R^*)} \tag{15}$$

In dieses Ergebnis können allein über das jeweils optimale Portefeuille noch anlegerindividuelle Bedingungen eingehen. Wenn jedoch bei den Anlageentscheidungen nur die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  berücksichtigt werden, dann wird aufgrund des Separationsergebnisses von *Tobin*<sup>15</sup> die optimale Struktur des Portefeuilles aus risikanten Wertpapieren von der individuellen Risikoeinstellung des Investors nicht beeinflusst. Man kann also mit einem vom Präferenzfunktional des Investors unabhängigen Wert  $a_i^*$  für die an den einzelnen Wertpapieren gehaltenen Anteile  $a_i = a_i^* / d$  schreiben, dabei ist  $d$  ein sich aus der individuellen Risikoeinstellung ergebender und für alle Wertpapiere  $i$  identischer Faktor<sup>16</sup>. Die Risikoeinstellung

13 Vgl. dazu auch *Copeland/Weston* (1988), S. 109 ff.

14 Vgl. *Franke/Hax* (1994), S. 376.

15 Vgl. *Tobin* (1958), S. 84.

16 Beweisskizze:  $u'(x, F)$  ist gemäß (3) in der zur Bedingung (10) für ein optimales Portefeuille äquivalenten Gleichung (12) zu substituieren. Wegen  $E u'(X^*, G) = \delta U / \delta \mu$  ergibt sich  $E(X_i) - p_i (1+r) = d \sum_k a_k \text{Cov}(X_i, X_k)$ , wenn  $d = -1/\sigma (\delta U / \delta \sigma : \delta U / \delta \mu)$  gesetzt wird. Bei stochastisch linear unabhängigen

bestimmt daher nur die sich aus dem Faktor d ergebende Aufteilung der Mittel zwischen sicherer Anlage<sup>17</sup> und riskantem Portefeuille, jedoch nicht die relative Gewichtung der einzelnen riskanten Wertpapiere.

Damit kann zu einem Kapitalmarktmodell mit einer Vielzahl von Investoren mit unterschiedlichen Risikoeinstellungen übergegangen werden. Im Gleichgewicht muß dann die wegen der *Tobin*-Separation für alle Anleger identische Struktur der riskanten Wertpapiere mit der Struktur des gesamten Angebotes übereinstimmen, weil sonst die Markträumungsbedingungen nicht erfüllt sein können, das heißt  $R^*$  ist gleich der Rendite des aus allen riskanten Anlagemöglichkeiten bestehenden Marktportefeuilles<sup>18</sup>. Die somit von individuellen Bedingungen bestimmter Anleger unabhängige Gleichung (15) ist mit der bekannten Wertpapiermarktklinie des CAPM identisch<sup>19</sup>.

### 5 Zum Modell von Martin Weber

*Weber* (1990) stellt sich die Aufgabe, ein bezüglich der individuellen Risikopräferenzen auf empirisch abgesicherten Annahmen beruhendes Modell zu entwickeln. Es wird davon ausgegangen, daß die Präferenzen eine Funktion von „Wert“ und „Risiko“ sind, wobei Wert durch den Erwartungswert  $\mu = E(X)$  und Risiko durch  $r = E \exp(c(X - \mu))$  mit  $c < 0$  gemessen wird<sup>20</sup>. Bei diesem neuen Risikomaß werden also bei der Erwartungswertbildung die Differenzen  $X - \mu$  nicht wie bei der Varianz quadriert, sondern statt dessen in die Exponentialfunktion eingesetzt. Dieser Ansatz ist letztlich allgemeiner als die herkömmlichen  $\mu$ - $\sigma$ -Regeln<sup>21</sup>.

Die zugeordnete lokale Nutzenfunktion soll für ein beliebiges, als Funktion von Wert und Risiko gegebenes Präferenzfunktional  $U(\mu, r)$  wieder durch partielle Ableitung nach den diskreten Wahrscheinlichkeiten  $w_i$  berechnet werden. Wegen  $r = \sum_i [w_i \exp(c(x_i - \sum_k x_k w_k))]$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\delta U(\mu, r)}{\delta w_i} &= \frac{\delta U}{\delta \mu} \frac{\delta \mu}{\delta w_i} + \frac{\delta U}{\delta r} \frac{\delta r}{\delta w_i} \\ &= \frac{\delta U}{\delta \mu} x_i + \frac{\delta U}{\delta r} [\exp(c(x_i - \mu)) - x_i c r] \end{aligned} \tag{16}$$

Unterstellt man für  $x_i = x$  auch bei stetigen Verteilungen die Richtigkeit dieses in *Tabelle 1* angegebenen Ergebnisses, dann erhält man für die erste Ableitung:

gigen Wertpapieren ist die Kovarianzmatrix invertierbar (vgl. *Rudolph* (1979), S. 25 f.). Auf der rechten Seite bleibt dann a,d stehen und auf der linken Seite ergibt sich ein exogen vorgegebener, von den individuellen Risikopräferenzen unabhängiger Ausdruck, der gleich a' gesetzt werden kann.

17 Für die sichere Anlage gilt die Separationsaussage nicht, da dann in der Beweisskizze in Fußnote 16 alle relevanten Kovarianzen verschwinden.

18 Vgl. auch *Franke/Hax* (1994), S. 345.

19 *Loistl* (1994), S. 227, ist dagegen der Ansicht, das CAPM auch ohne Gleichgewichtsannahmen herleiten zu können. Wie aus den obigen Ausführungen ersichtlich ist, ist eine solche Aussage deshalb problematisch, weil nur im Gleichgewicht das von den jeweiligen Risikopräferenzen abhängige optimale Portefeuille durch das Marktportefeuille ersetzt werden kann.

20 Vgl. *Weber* (1990), S. 252 und 262.

21 Vgl. *Weber* (1990), S. 255.

$$u'(x, F) = \frac{\delta U}{\delta \mu} + \frac{\delta U}{\delta r} [c \exp(c(x - \mu)) - cr] \tag{17}$$

Wie bei den  $\mu$ - $\sigma$ -Regeln sind Dominanzverstöße nicht ausgeschlossen, weil die Positivität der Ableitung  $u'(x, F)$  nicht allgemein garantiert werden kann<sup>22</sup>.

Die sich aus dem Modell von *Weber* ergebende Spezifikation der lokalen Nutzenfunktion ist schließlich wieder in Gleichung (14) einzusetzen. Dabei ist zu beachten, daß statt der Budgetbeschränkung in Gleichung (5) *Weber* die Restriktion  $\sum a_i = 1$  verwendet<sup>23</sup>, das heißt die Wertpapiere wurden zu  $X'_i = (W/p_i)X_i$  mit einem einheitlichen Preis  $p'_i = (W/p_i)p_i = W$  normiert. Substitution von (17) in (14) ergibt wegen  $1 + R_i = X_i/W$ ,  $1 + R^* = X^*/W$ ,  $1 + r = X_f/W$ ,  $\bar{X}^* = E(X^*)$  und  $\bar{X}_i = E(X_i)$ :

$$\begin{aligned} \frac{E(X_i) - X_f}{E(X^*) - X_f} &= \frac{\text{Cov}[X_i, \exp(c(X^* - \bar{X}^*))]}{\text{Cov}[X^*, \exp(c(X^* - \bar{X}^*))]} \\ &= \frac{E[(X_i - \bar{X}_i), \exp(c(X^* - \bar{X}^*))]}{E[(X^* - \bar{X}^*), \exp(c(X^* - \bar{X}^*))]} \end{aligned} \tag{18}$$

Dieses Ergebnis wird von *Weber* als Grundgleichung eines alternativen CAPM angegeben<sup>24</sup>. Dabei wird angenommen, daß bei der Berechnung des Risikomaßes  $r$  von allen Marktteilnehmern der gleiche Wert  $c$  angesetzt wird<sup>25</sup>. Fraglich ist aber, ob auch in diesem Modell alle Anleger unabhängig von ihrer Risikoeinstellung dasselbe Portefeuille aus riskanten Wertpapieren halten. Tatsächlich postuliert *Weber* aufgrund einer graphischen Intuition für sein Modell die Gültigkeit der *Tobin*-Separation<sup>26</sup>. Eine nähere Betrachtung zeigt allerdings, daß dieser Beweis nicht stichhaltig ist<sup>27</sup>. Es ist also zweifelhaft, ob in der Gleichung (18) statt des individuell optimalen Portefeuilles das Marktportefeuille als Referenzgröße verwendet werden kann.

### 6 Zusammenfassung und Ausblick

Gegenstand dieses Beitrages ist eine Anwendung der von *Machina* (1982) vorgestellten Theorie der differenzierbaren Risikopräferenzen auf portfeuilletheoretische Fragestellungen. Beim *Machina*-Ansatz ist bereits eine sehr wenig einschränkende Differenzierbarkeitsbedingung hinreichend für die Existenz einer lokalen Nutzenfunktion, durch die das Risikoverhalten ganz analog zu einer herkömmlichen *Bernoulli*-Nutzenfunktion beschrieben wird. Für fast alle bekannten Risikoentscheidungskalküle kann eine lokale Nutzenfunktion angegeben werden. Damit konnten unter wesentlich schwächeren Annahmen Bedingungen für die optimale Portefeuilleselektion formuliert werden. Insbesondere mit Bezug auf den State-Preference-Ansatz kann dabei festgestellt werden, daß die einschlägigen

22 Vgl. dazu *Weber* (1990), S. 263 ff.

23 Vgl. *Weber* (1990), S. 268.

24 Vgl. *Weber* (1990), S. 292.

25 Vgl. *Weber* (1990), S. 287.

26 Vgl. *Weber* (1990), S. 281 ff.

27 Das Problem besteht darin, daß die auf S. 282 in Abbildung 36 eingezeichnete Dominanzbeziehung keineswegs zwingend aus den unterstellten Krümmungseigenschaften folgt.

Ergebnisse auch dann Gültigkeit behalten, wenn herkömmliche *Bernoulli*-Nutzenfunktionen durch lokale Nutzenfunktionen vom *Machina*-Typ ersetzt werden<sup>28</sup>.

Nur unter bestimmten Bedingungen können jedoch aus einer solchen auf die Individualebene bezogenen Theorie der Portfeuilleselektion Aussagen zu einem umfassenden Kapitalmarktmodell bei einer Vielzahl von Investoren mit jeweils unterschiedlichen Risikopräferenzen abgeleitet werden. So läßt sich zwar aus der Bedingung für ein optimales Portfeuille ein Zusammenhang zwischen der Rendite eines einzelnen Wertpapiers und der Portfeuillerendite herleiten, der der Wertpapiermarktklinie des CAPM sehr ähnlich ist (vgl. Gleichung (14)). Das Beta berechnet sich jedoch hier aus den Kovarianzen der Renditen jeweils mit dem sich aus der lokalen Nutzenfunktion des Investors ergebenden Grenznutzen des optimalen Portfeuillees und ist damit von den in der Praxis kaum zu ermittelnden Risikopräferenzen eines ausgewählten Anlegers abhängig. Darüber hinaus kann auch das in diesem Renditezusammenhang als Referenzgröße dienende optimale Anlegerportfeuille von den individuellen Präferenzen abhängig sein und daher im allgemeinen nicht durch das Marktportfeuille ersetzt werden.

Die bekannte Grundgleichung des CAPM ergibt sich aus diesem Ergebnis durch eine bestimmte Spezifikation der lokalen Nutzenfunktion. Dazu muß angenommen werden, daß bei den Anlageentscheidungen nur die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  berücksichtigt werden. Jedem Präferenzfunktional  $U(\mu, \sigma)$  ist in diesem Fall eine quadratische lokale Nutzenfunktion mit linearem Grenznutzen zugeordnet, deren Koeffizienten bei der Berechnung der Kovarianzen wegfallen; das Beta ist also nicht mehr von der lokalen Nutzenfunktion des Anlegers abhängig. Aufgrund der *Tobin*-Separation kann unter Gleichgewichtsbedingungen außerdem das Marktportfeuille als Referenzgröße verwendet werden. Damit kommen in dem erwähnten Renditezusammenhang die individuellen Risikopräferenzen nicht mehr vor, und man erhält die Wertpapiermarktklinie des CAPM. Wenn die Erwartungswerte der Renditen und die Kovarianzen aus vergangenen Marktdaten geschätzt werden, dann kann das CAPM als Erklärungsmodell für am Kapitalmarkt beobachtbare Renditen interpretiert werden, wobei das Beta die Volatilität eines einzelnen Wertpapiers relativ zum Gesamtmarkt mißt.

Einer anderen Spezifikation der lokalen Nutzenfunktion entspricht dagegen das alternative CAPM von *Weber* (1990), bei dem die Standardabweichung durch ein anderes beziehungsweise allgemeineres Risikomaß  $r$  ersetzt wird. Wenn alle Anleger dasselbe Risikomaß  $r$  verwenden, dann ist auch bei diesem Ansatz das jetzt etwas anders zu berechnende Beta in dem erwähnten Renditezusammenhang von dem konkreten Präferenzfunktional  $U(\mu, r)$  eines bestimmten Anlegers unabhängig (vgl. Gleichung (18)). Im Modell von *Weber* ist es aber fraglich, ob das von der individuellen Risikoeinstellung unabhängige Marktportfeuille als Referenzgröße verwendet werden kann. Eine entsprechende Begründung für die Gültigkeit der *Tobin*-Separation erweist sich als nicht stichhaltig.

Die *Tobin*-Separation besagt, daß die optimale Struktur der riskanten Anlagen für alle Investoren identisch ist. Die Entscheidung, wie das Vermögen in Abhängigkeit

von der individuellen Risikoeinstellung zwischen sicheren und riskanten Wertpapieren aufzuteilen ist, kann also von der Frage getrennt werden, wie das riskante Portfeuille optimal zusammengestellt werden soll. In einem Kapitalmarktgleichgewicht muß das für alle Investoren einheitliche riskante Portfeuille außerdem wegen der Markträumungsbedingungen mit dem Marktportfeuille übereinstimmen. Unter den Bedingungen der *Tobin*-Separation würde es also genügen, wenn nur eine sichere Anlage und das Marktportfeuille, in dem alle riskanten Wertpapiere zusammengefaßt sind, am Kapitalmarkt gehandelt werden. (Daher auch die Bezeichnung „two-fund-separation“.) Eine darüber hinausgehende Vervollständigung der gehandelten Ansprüche – etwa durch die Einführung derivativer Instrumente – würde die Allokationseffizienz nicht weiter erhöhen.

Bei dieser Separationsaussage handelt es sich natürlich um ein spezielles Ergebnis, das nur unter bestimmten Annahmen bezüglich der individuellen Risikopräferenzen gültig ist. Ein trivialer Sonderfall liegt vor, wenn alle Investoren identische Risikopräferenzen besitzen, denn dann können sich auch nicht unterschiedliche optimale Portfeuillees ergeben. Aber auch wenn im Rahmen des klassischen CAPM bei den Anlageentscheidungen nur die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  berücksichtigt werden, ist das optimale riskante Portfeuille bekanntlich unabhängig von dem konkreten  $\mu$ - $\sigma$ -Präferenzfunktional<sup>29</sup>. Wird das Risikoverhalten der Anleger dagegen gemäß dem *Bernoulli*-Prinzip durch die Maximierung des Erwartungsnutzens beschrieben, dann gilt die *Tobin*-Separation nur unter zusätzlichen Anforderungen an die Nutzenfunktionen. So ist bei einer Nutzenfunktion aus der HARA-Klasse mit hyperbolischer absoluter Risikoaversion –  $u''(x) / u'(x) = 1 / (a + bx)$  die Struktur des riskanten Portfeuillees vom Anfangsvermögen und von der Variablen  $a$  unabhängig; die Variable  $b$  muß dagegen für alle Investoren gleich sein<sup>30</sup>. Für die weitere Forschung ergibt sich damit die Frage, ob sich ähnliche Bedingungen auch für lokale Nutzenfunktionen vom *Machina*-Typ angeben lassen. Die Kenntnis solcher Bedingungen würde es unter anderem ermöglichen, direkt anhand der zugeordneten lokalen Nutzenfunktion die Gültigkeit der *Tobin*-Separation für das Modell von *Weber* (1990) zu überprüfen.

28 Dagegen kann im Rahmen der Principal-Agent-Theorie bei einem Second-Best-Ansatz die Charakterisierung optimaler Entlohnungsfunktionen nicht einfach dadurch verallgemeinert werden, daß *Bernoulli*-Nutzenfunktionen durch lokale Nutzenfunktionen substituiert werden. Es ergeben sich vielmehr substantiell andere Bedingungen; vgl. im einzelnen *Rau-Bredow* (1995a).

29 Vgl. dazu neben den einschlägigen Lehrbuchdarstellungen auch die Beweisskizze in Fußnote 16.  
30 Die Formulierung des Ergebnisses wurde von *Mossin* (1977), S. 66, übernommen. Vgl. auch *Cass/Stiglitz* (1970); *Franke* (1983). Auch durch bestimmte Einschränkungen bezüglich der Verteilung kann Separation erreicht werden; vgl. *Ross* (1978).

Anhang

Wenn  $G(x)$  die Verteilungsfunktion von  $\sum a_k X_k$  ist, dann sei bei einem um marginal  $h$  höheren Anteil am Wertpapier  $i$   $G_h(x)$  die Verteilungsfunktion von  $\sum a_k X_k + hX_i$ . Aus der Existenz einer lokalen Nutzenfunktion folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{\delta U(G)}{\delta a_i} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{U(G_h) - U(G)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int [u(x, G) (dG_h(x) - dG(x)) + o(\|G_h - G\|)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int [E[u(\sum a_k X_k + hX_i, G) - u(\sum a_k X_k, G)] + o(\|G_h - G\|)] \\ &= E[u'(\sum a_k X_k, G) X_i] + \lim_{h \rightarrow 0} o(\|G_h - G\|) / h \end{aligned}$$

Mit  $k$  als oberer Schranke<sup>31</sup> für die Werte der Zufallsvariablen  $X_i$  gilt außerdem:

$$\begin{aligned} \|G_h - G\| &= \int |G_h(x) - G(x)| dx \\ &= \int |P(\sum a_k X_k + hX_i \leq x) - P(\sum a_k X_k \leq x)| dx \\ &\leq \int |G(x + hk) - G(x - hk)| dx = 2 h k \end{aligned}$$

Dabei folgt das letzte Gleichheitszeichen aus einer Betrachtung der Fläche zwischen zwei horizontal um  $2hk$  verschobenen Verteilungsfunktionen. Der Restterm  $o(\|G_h - G\|)/h$  kann damit durch  $2k o(\|G_h - G\|)/\|G_h - G\|$  abgeschätzt werden und geht gegen Null, weil gemäß der Definition des Landauschen Symbol  $o(\cdot)$  aus  $x \rightarrow 0$  auch  $o(x)/x \rightarrow 0$  folgt.

Literatur

Allais, Maurice (1953), Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: Critique des postulats et axiomes de l'école américain, in: *Econometrica*, Vol. 21, S. 503 – 543.  
Cass, David/Stiglitz, Joseph (1970), The structure of investor preferences and asset returns, and separability in portfolio allocation: A contribution to the pure theory of mutual funds, in: *Journal of Economic Theory*, Vol. 2, S. 122 – 160.  
Copeland, Thomas E./Weston, J. Fred (1988), *Financial theory and corporate policy*, 3. Aufl.  
Franke, Günter (1983), Kapitalmarkt und Separation, in: *Zeitschrift für Betriebswirtschaftslehre*, 53. Jg., S. 239 – 260.  
Franke, Günter/Hax, Herbert (1994), *Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt*, 3. Aufl.  
Kahneman, Daniel/Tversky, Amos (1979), Prospect theory: An analysis of decision under risk, in: *Econometrica*, Vol. 47, S. 263 – 291.  
Laux, Helmut (1991), *Entscheidungstheorie I*, 2. Aufl.  
Loistl, Otto (1994), *Kapitalmarkttheorie*, 4. Aufl.

31 Die Theorie der lokalen Nutzenfunktionen setzt voraus, daß die Zufallsvariablen nur endliche Werte annehmen; vgl. *Machina* (1982), S. 293.

Loomes, Graham/Sugden, Robert (1986), Disappointment and dynamic consistency in choice and uncertainty, in: *Review of Economic Studies*, Vol. 53, S. 271 – 282.  
Machina, Mark (1982), „Expected utility“ analysis without the independence axiom, in: *Econometrica*, Vol. 50, S. 277 – 323.  
Machina, Mark (1983), Generalized expected utility analysis and the nature of observed violations of the independence axiom, in: *Stigum, B. P./Wenstop, F.* (Hrsg.), *Foundations of utility and risk theory with applications*, S. 262 – 293.  
Machina, Mark (1987), Choice under uncertainty: Problems solved and unsolved, in: *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 1, S. 121 – 154.  
Mossin, Jan (1977), The economic efficiency of financial markets.  
Quiggin, John (1982), A theory of anticipated utility, in: *Journal of Economic Behavior and Organization*, Vol. 3, S. 323 – 343.  
Quiggin, John (1991), Comparative statics for risk dependent expected utility theory, in: *Journal of Risk and Uncertainty*, Vol. 4, S. 339 – 350.  
Rau-Bredow, Hans (1992), Zur theoretischen Fundierung der Institutionenökonomie.  
Rau-Bredow, Hans (1995a), Principal-Agent-Theorie ohne Substitutionsaxiom, in: *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, 214. Jg., S. 77 – 85.  
Rau-Bredow, Hans (1995b), Risikoentscheidungen und Substitutionsaxiom, in: *Die Betriebswirtschaft*, 55. Jg., S. 627 – 639.  
Ross, Stephen (1978), Mutual fund separation in financial theory. The separating distribution, in: *Journal of Economic Theory*, Vol. 17, S. 254 – 286.  
Rudolph, Bernd (1979), Kapitalkosten bei unsicheren Erwartungen.  
Schauenberg, Bernd (1990), Dreiecksdiagramme in der Diskussion um die Erwartungsnutzentheorie, in: *ZfbF* 42. Jg., S. 329 – 356.  
Schneeweiß, Hans (1968), Die Unverträglichkeit von  $(\mu, \sigma)$ -Prinzip und Dominanzprinzip, in: *Unternehmensforschung*, 12. Jg., S. 180 – 184.  
Sugden, James (1986), New developments in the theory of choice under uncertainty, in: *Bulletin of Economic Research*, Vol. 38, S. 1 – 24.  
Tobin, James (1958), Liquidity preference as behavior towards risk, in: *Review of Economic Studies*, Vol. 25, S. 65 – 86.  
Weber, Martin (1990), Risikoentscheidungskalküle in der Finanzierungstheorie.  
Weber, Martin/Cramer, Colin F. (1987), Recent developments in modelling preferences under risk, in: *OR Spektrum*, 9. Jg., S. 129 – 151.

Summary

Research in portfolio theory is usually done in the mean/variance framework. A more general approach to decision making under risk has been provided by *Machina* (1982) whereby a not very restrictive differentiability assumption makes it possible to assign a so called „lokal“ utility function to almost every decision rule, including the mean/variance principle. This paper gives a corresponding generalization of standard portfolio theory which includes state-preference-theory, the results of the classical CAPM and the model of *Weber* (1990) as special cases.