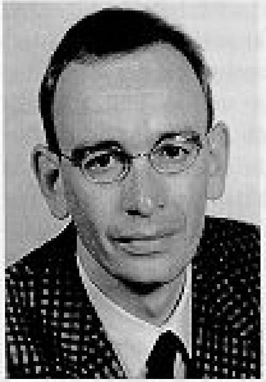
Hans Rau-Bredow*

Risikoentscheidungen und Substitutionsaxiom

Bernoulli-Prinzip; Erwartungsnutzentheorie; Fixkostenrelevanz; Rationalität; Risikoentscheidungen; Substitutionsaxiom



Die Erwartungsnutzenthorie – häufig auch als Bernoulli-Prinzip bezeichnet – geht mit dem Substitutionsaxiom von einer unstrittenen Voraussetzung aus. Obwohl man heute weiß, daß damit keine gültige Beschreibung des tatsächlichen Risikoverhaltens gegeben ist, wird insbesondere im deutschsprachigen Schrifttum am normativen Anspruch dieser Theorie unverändert festgehalten. In diesem Beitrag wird gezeigt, daß dafür keine stichhaltigen Gründe vorliegen. Statt dessen wird der Ansatz von Machina (1982) propagiert, bei dem das Substitutionsaxion durch eine viel weniger einschränkende Differenzierbarkeitsbedingung ersetzt wird. Um die Leistungsfähigkeit dieses Ansatzes zu demonstrieren, werden die wichtigsten der in den letzten Jahren im Ausland entwickelten alternativen Risikokalküle als Spezialfälle abgeleitet.

* Dr. Hans Rau-Bredow, Knorrstr. 41, 80807 München.

1. Einleitung

Nach der Erwartungsnutzentheorie ist das Kriterium für Risikoentscheidungen die Summe der in Nutzengrößen umgerechneten und mit den Wahrscheinlichkeiten multiplizierten Auszahlungen. Dieser Ansatz setzt neben einer vollständigen und transitiven Präferenzordnung und einer Stetigkeitsbedingung auch noch das umstrittene Substitutionsaxiom voraus. Anschaulich postuliert dieses Substitutionsaxiom die Irrelevanz gemeinsamer Komponenten beim Vergleich zweistufiger Lotterien, dabei wird zunächst eine zufällige Auswahl unter mehreren Lotterien getroffen und dann das endgültige Ergebnis ermittelt. Aus empirischer Sicht ist es heute wohl nicht mehr umstritten, daß das Substitutionsaxiom und damit die Erwartungsnutzentheorie als falsifiziert anzusehen ist[1].

Entsprechend der üblichen Unterscheidung zwischen deskriptiver und präskriptiver Entscheidungstheorie wird hierin wegen angeblich fehlerhafter individueller Risikoentscheidungen nur ein ökonomischer Aufklärungsbedarf im Hinblick auf rationales Verhalten gesehen, Korrekturen für die präskriptive Entscheidungstheorie und den aus einer normativen Interpretation der Erwartungsnutzentheorie für die Wirtschaftspraxis abgeleiteten Empfehlungen werden jedoch nicht für notwendig erachtet. So stellen Eisenführ/Weber (1993, S. 205) zwar die intuitiven Verletzungen des Substitutionsaxioms heraus, betonen aber: »Präskriptiv wird es (Das Substitutionsaxiom, H.R.B.) weitgehend bejaht (so auch von uns): ein rationaler Entscheider sollte seine Präferenzen nicht von beiden Lotterien gemeinsamen Komponenten abhängig machen.«

Nun ist auch innerhalb der Erwartungsnutzentheorie eine Unabhängigkeit von gemeinsamen Komponenten nicht in einem ganz umfassenden Sinne gegeben. Beispielhaft zeigt dies etwa die aktuelle Diskussion zur Relevanz von Fixkosten bei Risikoentscheidungen[2], wobei der Zusammenhang mit dem Substitutionsaxiom im folgenden noch genauer herauszuarbeiten sein wird. Bei dieser Diskussion wurde aber nie der Standpunkt vertreten, die Fixkostenrelevanz dadurch auszuschließen, daß nur noch lineare oder exponentielle von Neumann/Morgenstern Nutzenfunktionen als rational anzusehen sind. Vor diesem Hintergrund kann man dann auch die spezielle Form der durch das Substitutionsaxiom postulierten Entscheidungsirrelevanz gemeinsamer Komponenten kritisch hinterfragen[3].

Um die speziellen Voraussetzungen des Substitutionsaxioms herauszuarbeiten, wird in diesem Beitrag zunächst die Präferenzbildung bezüglich zustandsbedingter Ansprüche betrachtet, d.h. statt Gütermengen wie in der mikroökonomischen Haushaltstheorie werden in die Präferenzfunktion die einzelnen, den verschiedenen Zukunftslagen zugeordneten Auszahlungen eingesetzt. Ein solcher State-Preference-Ansatz wurde bereits in den klassischen Arbeiten von Hirshleifer (1965, S. 523ff.; 1966) und Debreu (1976, S. 119ff.) verwendet. Es zeigt sich dann, daß das Substitutionsaxiom eine besonders einfache, nämlich additiv separierbare Präferenzfunktion voraussetzt. Im allgemeinen mikroökonomischen Ansatz der Güterpräferenzen wird jedoch eine solche spezielle Gestalt der Präferenzfunktion in der Regel nicht vorausgesetzt. Deshalb wird in diesem Beitrag auch bei der anschließenden Betrachtung der Präferenzordnung für unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen davon ausgegangen, daß die Beachtung der Relation der stochastischen Dominanz eine hinreichende Bedingung für rationale Risikoentscheidungen ist.

So wird in der Theorie der lokalen Nutzenfunktionen von Machina (1982) das Substitutionsaxiom durch eine allgemeine Differenzierbarkeitsbedingung ersetzt. Dieser Ansatz enthält neben der Erwartungsnutzentheorie und den sogenannten klassischen, von den Momenten ausgehenden Entscheidungsregeln auch die wichtigsten der in der neueren Literatur entwikkelten alternativen Risikokalküle als Spezialfälle. Explizit wird dies in diesem Beitrag für die »Rangplatzabhängige Nutzentheorie«, die »Ratio Form« und die »Disappointment Theorie« gezeigt. Aus den jeweils zugeordneten lokalen Nutzenfunktionen geht unmittelbar hervor, ob es zu Dominanzverstößen kommt und ob Risikoversion abgebildet wird.

Der Beitrag ist wie folgt aufgebaut: Im folgenden Abschnitt 2 werden zunächst die allgemeinen Grundlagen für Risikopräferenzen erläutert und anschließend in Abschnitt 2 das Substitutionsaxiom bei Zustands- und Wahrscheinlichkeitspräferenzen kritisch diskutiert. Im Abschnitt 4 wird dann die Theorie der lokalen Nutzenfunktion vorgestellt und auf die verschiedenen Risikokalküle angewendet. Die Zusammenfassung enthält auch einige Bemerkungen zu den Konsequenzen für die ökonomische Theorie.

2. Grundlagen der Präferenzbildung bei Risiko

2.1. Entscheidungen bei Unsicherheit und Risiko

Wie bei jedem individuellen Entscheidungsproblem ist eine Rangordnung über die zur Auswahl stehenden Handlungsalternativen zu bilden. Jede Handlungsalternative wird beschrieben durch die möglichen Umweltzustände, die bei einer jeweiligen Entscheidung eintreten können, und den zugeordneten Wahrscheinlichkeiten. Definitionsgemäß sind in einer Risikosituation diese Daten vollständig verfügbar. Hier lautet jedoch ein Einwand, daß die Individuen in der Realität bei ihren Entscheidungen weder alle denkbaren Zukunftslagen aufzählen noch die jeweils objektiv richtigen Wahrscheinlichkeiten angeben oder korrekt berechnen können[4]. Wie insbesondere von Knight (1921, S. 19f., 197ff.) betont wurde, sei der eigentlich relevante Fall die durch eine solche unvollständige Datenlage charakterisierte Situation der Unsicherheit.

Eine Schwierigkeit besteht zunächst darin, daß die Individuen mitunter offensichtlich Schwierigkeiten haben, aus einer gegebenen Entscheidungssituation die relevanten Daten korrekt und konsistent abzuleiten. Man mag etwa bezweifeln, daß in der Praxis die Erwartungen immer völlig korrekt entsprechend der Bayes-Regel den jeweiligen Beobachtungen angepaßt werden. Zudem hat man festgestellt, daß eine unterschiedliche Formulierung logisch äquivalenter Entscheidungssituationen, z.B. aufgrund einer unterschiedlichen Betonung von Gewinnen oder Verlusten, auch zu unterschiedlichen Entscheidungen führen kann (Framing Effects)[5].

Das Problem, daß die Individuen bei ihren Entscheidungen die wahren Wahrscheinlichkeiten nicht kennen, wird neuerdings vor allem unter dem Stichwort Ambiguität diskutiert. Ausgangspunkt ist dabei insbesondere ein von Ellsberg (1961) formuliertes Paradox. Dabei handelt es sich um ein hier nicht im einzelnen zu wiederholendes Urnenmodell, bei dem den Individuen die Wahrscheinlichkeiten nur teilweise bekannt sind. Es zeigt sich, daß in Abhängigkeit von der Fragestellung die Individuen bei ihren Entscheidungen offensichtlich von unterschiedlichen und sich widersprechenden Annahmen bezüglich der unbekannten Wahrscheinlichkeiten ausgehen, die anscheinend darauf beruhen, daß die Unkenntnis der Wahrscheinlichkeiten für sich allein genommen negativ bewertet wird[6].

In diesem Beitrag wird jedoch nur das Problem behandelt, aus vollständig gegebenen Daten über die möglichen Zukunftslagen und den zugeordneten Wahrscheinlichkeiten eine optimale Entscheidungsalternative abzuleiten. Man kann dies damit begründen, daß jeder Entscheidung irgendwelche Vorstellungen über mögliche Zukunftslagen und Wahrscheinlichkeiten zugrundeliegen. So werden bei der bekannten MaxiMin-Regel zwar keine Annahmen über die Wahrscheinlichkeiten benötigt, implizit wird aber immer die jeweils denkbar ungünstigste Wahrscheinlichkeitsverteilung unterstellt[7]. Letztlich ist die Formulierung optimaler Entscheidungsregeln unabhängig davon, ob im konkreten Anwendungsfall einer solchen Regel die subjektiven Annahmen über die möglichen Zukunftslagen und den zugeordneten Wahrscheinlichkeiten auch objektiv richtig sind.

2.2. Präferenzfunktionen bei Risiko

Es sei eine vollständige und transitive Rangordnung bezüglich der Auswahl stehenden Handlungsalternativen unterstellt. Vollständigkeit heißt, daß für beliebige Alternativen A und B entweder $A \succcurlyeq B$ und $B \succcurlyeq A$ gilt. Bei Transitivität folgt aus $A \preccurlyeq B$ und $B \preccurlyeq C$ auch $A \preccurlyeq C$.

Diese Anforderungen an die Präferenzordnung erscheinen als unmittelbar einsichtig, lassen sich aber bei empirischen Untersuchungen nicht immer bestätigen. Als »Preference Reversal« wird die Beobachtung bezeichnet, daß z.B. die Individuen bei einem direkten Vergleich die weniger riskante Lotterie bevorzugen, bei einem simulierten Verkauf jedoch zugleich für die risikoreichere Lotterie einen höheren Preis verlangen[8].

Üblicherweise wird in der ökonomischen Theorie die Existenz einer Präferenzfunktion U ( ) unterstellt, welche den einzelnen Handlungsalternativen reelle Zahlen zuordnet. Es ist dann die Handlungsalternative zu wählen, bei der die Präferenzfunktion den größten Wert annimmt. Die Existenz einer solchen Präferenzfunktion folgt noch nicht aus Vollständigkeit und Transitivität der Rangordnung, man benötigt noch die Eigenschaft der Ordnungsdichtheit, d.h. bei einer Folge von Handlungsalternativen mit $A_n \rightarrow A$ und $A_n \preccurlyeq B$ für alle n folgt auch $A \preccurlyeq B$; und entsprechend folgt aus $A_n \succcurlyeq B$ auch $A \succcurlyeq B$. Bei Ordnungsdichtheit kann die Existenz einer Präferenzfunktion bewiesen werden, die dann auch stetig ist[9].

Zusammenfassend wird für die Zwecke dieses Beitrages unterstellt, daß jede Handlungsalternative durch die für möglich gehaltenen Zukunftslagen und den zugeordneten Wahrscheinlichkeiten beschrieben wird und mit Hilfe einer Präferenzfunktion durch reelle Zahlen bewertet werden kann. Im folgenden geht es nur noch um die Frage, welche Anforderungen an eine solche Präferenzfunktion vernünftigerweise zu stellen sind.

2.3. Der Erwartungsnutzen als spezielle Präferenzfunktion

Bei der axiomatischen Begründung der Erwartungsnutzentheorie wird außer Vollständigkeit und Transitivität noch das Stetigkeits- und das Substitutionsaxiom vorausgesetzt. Zur Definition dieser Axiome wird der Begriff einer mit $pA \oplus (1-p)B$ bezeichneten zweistufigen Lotterie benötigt, dabei wird im ersten Schritt mit den Wahrscheinlichkeiten p und 1–p eine Entscheidung zwischen den Lotterien A und B getroffen und dann anschließend innerhalb der ausgewählten Lotterie das endgültige Ergebnis ermittelt.

Das Stetigkeitsaxiom postuliert bei $A \preccurlyeq B \preccurlyeq C$ die Existenz einer Wahrscheinlichkeit p, so daß die zweistufige Lotterie $pA \oplus (1-p)C$ indifferent zur Lotterie B ist. Die Existenz einer solchen Wahrscheinlichkeit erscheint plausibel, da man für $p = 0$ die Lotterie C und für $p = 1$ die Lotterie A erhält. Daß sich für ein bestimmtes p Indifferenz ergibt, bedeutet, daß die Präferenzfunktion keine Sprungstellen aufweist, also stetig ist. Es wurde schon dargestellt, daß die Existenz einer stetigen Präferenzfunktion bei einer ordnungsdichten Rangordnung bewiesen werden kann.

Dagegen impliziert das Substitutionsaxiom eine ganz spezielle Gestalt der Präferenzfunktion. Es wird postuliert, daß die Rangordnung zwischen zwei Lotterien A und B auch bei der Substitution innerhalb mehrstufiger Lotterien erhalten bleibt, d.h. aus $A \preccurlyeq B$ folgt $pA \oplus (1-p)C \preccurlyeq pB \oplus (1-p)C$ für beliebige C und p. Die Vorziehungswürdigkeit von A oder B soll also unabhängig davon sein, ob diese Alternativen isoliert oder innerhalb mehrstufiger Lotterien miteinander verglichen werden.

Mithilfe dieser Axiome kann die Existenz einer auf der Ergebnismenge definierten und bis auf positive lineare Transformationen eindeutigen Hilfsfunktion $u(x_i)$ bewiesen werden, die überlicherweise als von Neumann/Morgenstern Nutzenfunktion bezeichnet wird, so daß die Präferenzfunktion durch den Erwartungswert des Nutzens $U = \sum u(x_i)\, p_i$ gegeben ist[10]. Fraglich ist, ob nur Präferenzfunktionen in dieser speziellen Gestalt als rational anzusehen sind.

3. Diskussion des Substitutionsaxioms

Die Diskussion des Substitutionsaxioms soll jeweils in einem Zustandspräferenz- und in einem Wahrscheinlichkeitspräferenzansatz erfolgen. Beim Zustandspräferenansatz wird von n verschiedenen für möglich gehaltenen Zukunftslagen ausgegangen und die Präferenzbildung bezüglich der den einzelnen Zukunftslagen zugeordneten und von der gewählten Handlungsalternative abhängigen Einkommenshöhen betrachtet. Beim Wahrscheinlichkeitspräferenzansatz werden die Präferenzen dagegen auf die den einzelnen Handlungsalternativen zugeordneten Wahrscheinlichkeitsverteilungen bezogen, wobei dann zumindest im diskreten Fall eine Auflistung aller möglichen Einkommenshöhen fest vorgegeben sein muß.

3.1. Zustandspräferenzen und Substitutionsaxiom

Zustandspräferenzen können gemäß Debreu (1976) S. 119ff. als direkte Verallgemeinerung von Güterpräferenzen eingeführt werden. Die Güter sind dann außer nach ihren physischen Qualitäten zusätzlich auch nach der Verfügbarkeit in den einzelnen späteren Zukunftslagen zu differenzieren. In diesem Beitrag wird jedoch nur ein einheitliches Gut betrachtet, das als Geldeinkommen interpretiert werden kann. X_i ist dann also nicht wie in der Haushaltstheorie die Menge von Gut i, sondern die Höhe des Geldeinkommens, falls später der Umweltzustand i eintritt.

In Abbildung 1 sind die Indifferenzkurven bei zwei möglichen Umweltzuständen eingezeichnet. Wie üblich verlaufen die Indifferenzkurven konvex zum Ursprung, d.h. eine marginale Reduzierung des Einkommens im Zustand 1 wird umso weniger negativ bewertet – gemessen an-

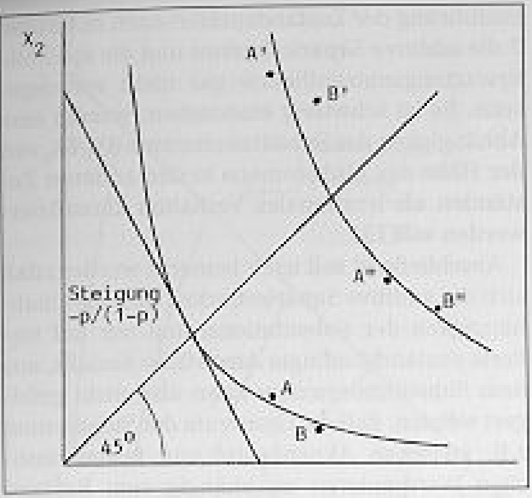


Abb. 1: Indifferenzkurven für zustandsbedingtes Einkommen bei zwei möglichen Umweltzuständen.

hand der für ein unverändertes Nutzenniveau als Ausgleich verlangten Einkommenserhöhung im Zustand 2 –, je größer das insgesamt im Zustand 1 verfügbare Einkommen ist. Risikoaversion liegt vor, wenn jedes unsichere Einkommen geringer bewertet wird als ein sicheres Einkommen in der Höhe des Erwartungswertes[11]. Da die Einkommensverteilungen mit konstantem Erwartungswert $\overline{X} = pX_1 + (1-p)X_2$ eine Gerade mit Steigung $-p/(1-p)$ bilden, müssen bei Risikoaversion die Indifferenzkurven diese Gerade der erwartungswertneutralen Einkommensverteilung im Schnittpunkt mit der 45° Grad Linie genau tangieren, weil dort wegen $X_1 = X_2$ Sicherheit vorliegt.

Mit Hilfe der Abbildung 1 kann nun verdeutlicht werden, daß die Präferenzbildung von gewissen gemeinsamen Komponenten abhängig sein kann. Ausgangspunkt seien zwei Alternativen $A = (X_1, X_2) \succ B = (Y_1, Y_2)$. Bei einer exogenen Erhöhung des Einkommens im Zustand 2 um einen alternativenidentischen Betrag c kann sich die Vorteilhaftigkeit der Alternativen umkehren, weil aufgrund einer solchen Einkommenserhöhung der Grenznutzen des Geldeinkommens im Zustand 2 relativ zum Grenznutzen des Geldeinkommens im Zustand 1 kleiner wird, es kann dann zu der Rangordnung $A' = (X_1, Y_2+c) \prec B' = (Y_1, Y_2+c)$ kommen.

Ebenso kann auch die Entscheidungsrelevanz einer exogenen, zustandsunabhängigen fixen Einkommenserhöhung c (oder bei $c < 0$ die Relevanz fixer Kosten) untersucht werden, wobei die Entscheidungsrelevanz noch nicht aus dem Gesetz vom abnehmenden Grenznutzen folgt. Abbildung 1 zeigt, daß wenn die weiter außen verlaufenden Indifferenzkurven eine etwas andere Steigung haben, ein fixes Einkommen die marginalen Substitutionsraten zwischen den Einkommenshöhen in den beiden Zuständen und damit die Präferenzbildung beeinflussen kann. Aus dem eingezeichneten Verlauf der Indifferenzkurven ergeben sich gleichzeitig die Bewertungen $A = (X_1, X_2) \succ B = (Y_1, Y_2)$ und $A'' = (X_1+c, X_2+c) \prec B'' = (Y_1+c, Y_2+c)$.

Diese Beispiele, daß gemeinsame Komponenten entscheidungsrelevant sein können, sind auch innerhalb der Erwartungsnutzentheorie möglich. Bei diesem Ansatz ergeben sich aus $\overline{u} = p\,u(X_1) + (1-p)\,u(X_2)$ die Einkommensverteilungen mit gleichem Nutzenerwartungswert, man erhält Indifferenzkurven mit der Steigung:

$$\frac{\delta X_1}{\delta X_2} = \frac{-p}{1-p}\,\frac{u'(X_1)}{u'(X_2)}$$

Man rechnet unmittelbar nach, daß bei Risikoaversion wegen $u''(x) < 0$ die Indifferenzkurven konvex verlaufen.

Es lassen sich nun auf einfache Weise die bekannten Bedingungen verdeutlichen, welche die Entscheidungsirrelevanz von zustandsunabhängigen, fixen Einkommensbestandteilen sicherstellen. Dazu müssen alle Indifferenzkurven dieselbe Steigung aufweisen, d.h. die an den Stellen (X_1+c, X_2+c) zu bildenden Grenzraten der Substitution $\delta X_2/\delta X_1$ müssen unabhängig von c sein. Aus der oben angegebenen Gleichung folgt hieraus durch Nullsetzung der Ableitung von $u'(X_1+c) / u'(X_2+c)$ nach c die Bedingung $-u''(X_1+c) / u'(X_1+c) = -u''(X_2+c) / u'(X_2+c)$, also konstante absolute Risikoaversion $-u''(x) / u'(x)$. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn eine exponentielle Nutzenfunktion $u(x) = 1 - \exp(-ax)$ vorliegt, oder wenn die Nutzenfunktion bei Risikoneutraliät linear verläuft.

Die bisherigen Beispiele haben gezeigt, daß auch innerhalb der Erwartungsnutzentheorie nicht in einem umfassenden Sinne von einer

Unabhängigkeit der Präferenzbildung von gemeinsamen Komponenten gesprochen werden kann. Die besonderen Restriktionen des Substitutionsaxioms werden aber in Situationen mit mehr als zwei möglichen Zukunftslagen deutlich. Dazu betrachte man eine Entscheidung zwischen Lotterien A und B, wobei – ohne Beschränkung der Allgemeinheit – in den mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, ..., p_i eintretenden Zukunftslagen 1, ..., i die Höhe des Einkommens für beide Lotterien identisch ist. Dann lassen sich A und B mit $p = p_1 + ... + p_i$ als zweistufige Lotterien $A = pC \oplus (1-p)A'$ und $B = pC \oplus (1-p)B'$ darstellen, wobei bei der gemeinsamen Lotteriekomponente C mit den Wahrscheinlichkeiten p_1/p, ..., p_i/p jeweils endgültige Zustände mit einem entscheidungsunabhängigen Einkommen eintreten, während sich in den bei A' bzw. B' mit den Wahrscheinlichkeiten $p_{i+1}/(1-p)$, ..., $p_n/(1-p)$ eintretenden Zukunftslagen unterschiedliche Auszahlungen ergeben. Durch das Substitutionsaxiom wird daher die Eintscheidungsirrelevanz von allen Alternativen gemeinsamen Einkommensbestandteilen ausschließlich für solche Zukunftslagen postuliert, in denen sich unabhängig von der gewählten Alternative immer dieselbe Auszahlung ergibt.

Aus dieser Interpretation folgt unmittelbar, wenn nur in zwei Zukunftslagen die Einkommenshöhen in gegensätzliche Richtungen zur Bestimmung der Substitutionsraten variiert werden, daß die Grenzraten der Substitution $\delta X_i/\delta X_j$ zwar nicht wie bei Risikoneutralität zwangsläufig konstant sind, aber nur von X_i und X_j und *nicht* von den Einkommenshöhen in den übrigen Zuständen abhängig sein dürfen. Dies bedeutet, daß die Präferenzfunktion eine Darstellung $U(X_1, ..., X_n) = U_1(X_1) + ... + U_n(X_n)$ besitzt, also additiv separierbar ist. Genau dies ist die spezielle Bedingung, die sich aus dem Substitutionsaxiom für Zustandspräferenzen ergibt. Additive Separierbarkeit der Präferenzen wird zwar mitunter auch z.B. bei Entscheidungen mit mehrfacher Zielsetzung oder bei Zeitpräferenzen angenommen, dies wird dort aber immer als vereinfachende Voraussetzung ohne zwingenden normativen Anspruch verstanden[12]. In der allgemeinen Gleichgewichtsanalyse bei Debreu (1976) wird bei der Einführung der Zustandspräferenzen in Kapitel 7 die additive Separierbarkeit und die spezielle Erwartungsnutzentheorie gar nicht vorausgesetzt. Es ist schwierig einzusehen, warum eine Abhängigkeit der Substitutionsraten $\delta X_i/\delta X_j$ von der Höhe des Einkommens in den anderen Zuständen als irrationales Verhalten klassifiziert werden soll[13].

Abschließend soll noch bemerkt werden, daß sich die additive Separierbarkeit und die Unabhängigkeit der Substitutionsraten nur auf isolierte zustandsbedingte Ansprüche bezieht, aus dem Substitutionsaxiom kann also nicht gefolgert werden, daß die Grenzrate der Substitution z.B. zwischen Aktienbesitz und festverzinslichen Wertpapieren unabhängig vom Bestand an Immobilien ist. Da die angesprochenen Anlagemöglichkeiten nicht nur in einer einzigen Zukunftslage von Null verschiedene Werte annehmen, handelt es sich jeweils um Güterbündel aus mehreren zustandsbedingten Ansprüchen. Die Unabhängigkeit der Substitutionsraten gilt aber nur für einzelne zustandsbedingte Ansprüche, die in der Praxis kaum gehandelt werden, sich aber theoretisch in einem vollständigen Markt aus stochastisch linear unabhängigen Wertpapieren zusammenstellen lassen[14].

3.2. Wahrscheinlichkeitspräferenzen und Substitutionsaxiom

Bei einem Wahrscheinlichkeitspräferenzansatz lassen sich die Indifferenzkurven auch bei insgesamt drei möglichen Zukunftslagen in einem zweidimensionalen Koordinatensystem (p_1, p_3) darstellen, weil sich p_2 dann jeweils aus $p_2 = 1 - p_1 - p_3$ ergibt (vgl. Abb. 2). Wenn $X_1 < X_2 < X_3$ vorausgesetzt wird, dann führt eine Bewegung nach links oben zu einem höheren Nutzenniveau, weil dann die Wahrscheinlichkeit der ungünstigsten Alternativen X_1 kleiner und die Wahrscheinlichkeit von X_3 größer wird. Da nur Koordinaten mit $p_1 + p_3 \leqq 1$ zulässig sind, wird diese Darstellung als Dreiecksdiagramm bezeichnet[15].

Ein möglicher Verlauf der Indifferenzkurven ist in Abbildung 2 eingezeichnet. Die Annahme, daß sich die Indifferenzkurven derart auffächern, wird als »Fanning Out« Hypothese be-

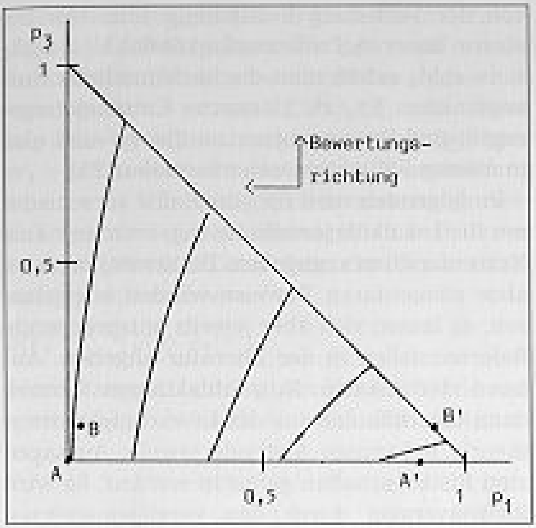


Abb. 2: Verlauf der Indifferenzkurven beim Wahrscheinlichkeitspräferenzansatz in einem Dreiecksdiagramm

zeichnet und kann viele der typischen Verletzungen des Substitutionsaxioms erklären[16]. Z.B. gilt beim Allais-Paradox $X_1 = 0$, $X_2 = 1$ Million DM und $X_3 = 5$ Millionen DM. Es werden dann die Alternativen A = (0;0) und B = (0,01; 0,1) sowie A' = (0,89;0) und B' = (0,9; 0,1) miteinander verglichen. Aus Abbildung 2 ergibt sich dann A > B und A' < B', diese intuitiv einsichtigen Rangordnungen widersprechen aber dem Substitutionsaxiom.

Da im Rahmen der Erwartungsnutzentheorie $\bar{u} = u(X_1)\, p_1 + u(X_2)\,(1-p_1-p_3) + u(X_3)\, p_3$ gilt, erhält man als Indifferenzkurven parallel verlaufende Geraden[17]. Die Bewertungskombination des Allais-Paradoxes ist in diesem Fall offensichtlich ausgeschlossen. Auch hier stellt sich die Frage, warum ausschließlich ein linearer Verlauf der Indifferenzkurven als rational anzusehen ist.

Präferenzen für diskrete Wahrscheinlichkeiten bzw. für zustandsbedingtes Einkommen sind zwei unterschiedliche Ansätze, von denen keiner den anderen als Spezialfall enthält. Da z.B. im Wahrscheinlichkeitspräferenzansatz eine endliche Anzahl möglicher Ergebnisse fest vorgegeben sein muß, kann eine marginale Variation der Ergebnisse nicht berücksichtigt werden. Diese Einschränkung gilt aber nicht bei stetigen, über die ganze reelle Achse definierten Verteilungen. Ein umfassender Ansatz geht daher von beliebigen diskreten oder stetigen Verteilungen aus, da als Argument dann Verteilungsfunktionen $F(x) = P(X<x)$ eingesetzt werden, wird dann statt von einer Präferenzfunktion von Präferenzfunktionalen gesprochen.

Anders als bei Präferenzen für zustandsbedingtes Einkommen werden beim Wahrscheinlichkeitspräferenzansatz Dominanzverstöße nicht immer direkt deutlich. Offensichtlich ist die Verteilung einer Zufallsvariablen Y der Verteilung der Zufallsvariablen X vorzuziehen, wenn $Y = w(X)$ mit einer Funktion $w(x)$ mit $w(x) \geqq x$ für alle x und $w(x) > x$ für mindestens ein x gilt. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn das Präferenzfunktional die Relation der stochastischen Dominanz beachtet, d.h. aus $F(x) \leqq G(x)$ für alle x und $F(x) < G(x)$ für mindestens ein x folgt $U(F) > U(G)$. Stochastische Dominanz impliziert eine gewisse Rechtsverschiebung der Verteilung zugunsten höherer Ergebnisse. Bei diskreten Verteilungen handelt es sich um eine geringfügig strengere Forderung, z.B. gibt es bei zwei Elementarereignissen mit $X_1 = X_2 = 1$ und $Y_1 = 1$, $Y_2 = 2$ offensichtlich keine Darstellung $Y = w(X)$, obwohl die Verteilung von Y die Verteilung von X stochastisch dominiert. Bei stetigen Verteilungen sind jedoch beide Forderungen äquivalent[18].

Bereits bei Allais (1953) findet sich die Ansicht, daß der Ausschluß von Verstößen gegen die stochastische Dominanz die einzige Bedingung für eine rationale Präferenzbildung bei Risiko darstellt. Dieser Standpunkt soll hier ebenfalls übernommen werden.

4. Lokale Nutzenfunktionen und alternative Risikokalküle

In den letzten Jahren sind eine Reihe alternativer Risikoentscheidungskalküle entwickelt worden. Mitunter wird dabei nicht ausdrücklich zwischen einem deskriptiven und einem normativen Ansatz unterschieden, aber zumindest einige Autoren interpretieren diese neueren Modelle explizit als normative Theorien[19]. Diese alternativen Ansätze sollen im folgenden jeweils als Spezialfall der allgemeinen Theorie der lokalen Nutzenfunktion dargestellt werden.

4.1. Die Theorie der lokalen Nutzenfunktionen

In dem Ansatz von Machina (1982) wird das Substitutionsaxiom durch die viel weniger einschränkende Bedingung der Fréchet-Differenzierbarkeit ersetzt, dabei handelt es sich um ein auf Präferenzfunktionale anwendbares Differenzierbarkeitskonzept. Zwar ist die durch das Substitutionsaxiom bedingte Linearität in den Wahrscheinlichkeiten nicht mehr gegeben, aber Differenzierbarkeit erlaubt mit Hilfe einer lokalen, im zweiten Argument auch von der Verteilung abhängigen Nutzenfunktion u(x,F) eine lokale Näherung durch einen linearen Ansatz. Konkret kann die Differenz U(F) – U(G) wie folgt durch die Differenz der Erwartungsnutzen approximiert werden[20]:

$$U(F) - U(G) = \int u(x,G)\ (dF(x) - dG(x)) + o(||F-G||)$$

Dabei steht o( ) für Restterme höherer Ordnung, d.h. aus $x \to 0$ folgt $o(x)/x \to 0$. Für alle Verteilungen F(x), die sich gemäß der durch $||F-G|| = \int |F(x)-G(x)|\,dx$ definierten Metrik in der Umgebung der Verteilung G(x) befinden, kann das Verhalten also näherungsweise als Maximierung des Erwartungswertes einer einheitlichen Nutzenfunktion u(x,G) beschrieben werden.

Der Ansatz kann veranschaulicht werden, wenn man im diskreten Fall die partiellen Ableitungen der Präferenzfunktion nach den einzelnen Wahrscheinlichkeiten $\delta U/\delta p_i$ als lokale Nutzenfunktion $u(x_i, p)$ interpretiert. Im Gegensatz zur speziellen Erwartungsnutzentheorie sind diese partiellen Ableitungen im allgemeinen auch von der Wahrscheinlichkeitsverteilung abhängig. Analog zur oben angegebenen Gleichung kann dann die Differenz U(q) – U(p) durch $\Sigma\, \delta U/\delta p_i\ (q_i - p_i)$ approximiert werden.

Bei einer sogenannten klassischen, als Funktion der Momente $M_k = E(x^k)$ gegebenen Präferenzfunktion $U(M_1, \ldots, M_n)$ erhält man z.B. die lokale Nutzenfunktion $u(x,F) = \Sigma\ (\delta U/\delta M_k)\ x^k$. Hierbei werden im allgemeinen die Koeffizienten $\delta U/\delta M_k$ auch von den Momenten und damit von der Verteilung F abhängig sein, nur bei einem linearen Präferenzfunktional $U = a_1 M_1 + \ldots + a_n M_n$ erhält man die herkömmliche Nutzenfunktion $\Sigma a_k\ x^k$, klassische Entscheidungsregeln und Erwartungsnutzentheorie sind also in diesem Fall miteinander vereinbar[21].

Im folgenden wird für eine Reihe verschiedener Risikokalküle jeweils die zugeordnete lokale Nutzenfunktion angegeben. Die etwas längeren, aber elementaren Beweise werden weggelassen, es lassen sich aber jeweils entsprechende Referenzstellen in der Literatur angeben. Anhand der lokalen Nutzenfunktionen können dann mit Hilfe der aus der Erwartungsnutzentheorie bekannten Methode jeweils Aussagen zum Risikoverhalten gemacht werden. So wird Risikoaversion durch den verallgemeinerten Pratt/Arrow Index $-u''(x,F)/u'(x,F)$ gemessen[22]. Risikoaversion liegt also bei einer als Funktion von x konkav verlaufenden Nutzenfunktion vor. Wenn u(x,F) eine monoton steigende Funktion von x ist, dann wird die Relation der stochastischen Dominanz beachtet[23].

4.2. Lokale Nutzenfunktionen alternativer Risikokalküle

4.2.1. Prospect Theory

Bei der vielbeachteten Prospect Theory von Kahneman/Tversky (1979) werden auch die diskreten Wahrscheinlichkeiten gewichtet, die Präferenzfunktion lautet also $U = \Sigma\ u(x_i)\ w(p_i)$. Der Anwendung dieser Formel ist allerdings eine sogenannte Editing-Phase vorgeschaltet, bei der insbesondere identische Ergebnisse zusammenzufassen und dominierte Alternativen auszusondern sind. Aufgrund dieser Editing-Phase und weil dieser Ansatz nicht konsistent für stetige Verteilungsfunktionen verallgemeinert werden kann, ist die Theorie der lokalen Nutzenfunktionen nicht auf die Prospect Theory anwendbar.

4.2.2. Rangplatzabhängige Nutzentheorien

Bei der Prospect Theory kann es zu Dominanzverstößen kommen, die durch die Editing-Phase ausgeschlossen werden sollen. Nach einem Vorschlag von Quiggin (1982) kann diese Schwierigkeit jedoch umgangen werden, wenn erst die kumulierten Wahrscheinlichkeiten gewichtet werden, d.h. es gilt $\Sigma u(x_i)\ w_i$ mit $w_i = w(p_1+...+p_i)-w(p_1+...p_{i-1})$ bzw. $w_1 = w(p_1)$ bzw. $w_1 = w(p_1)$ unter Beachtung der Rangordnung $x_1 <...< x_n$. D.h., eine diskrete oder stetige Verteilungsfunktion ist zunächst mit einer Funktion w(x) zu gewichten und dann der Erwartungsnutzen zu berechnen:

$$U(F) = \int u(x)\ dw(F(x))$$

Einer Rangplatzabhängigen Nutzentheorie entspricht folgende lokale Nutzenfunktion[24]:

$$u(x,F) = \int_0^x u'(t)\ w'(F(t))\ dt$$

Offensichtlich wird die stochastische Dominanz beachtet, denn die Ableitung $u'(x,F) = u'(x)\ w'(F(x))$ nach x ist für monoton steigende Funktionen u(x) und w(x) positiv, d.h. es liegt eine monoton steigende lokale Nutzenfunktion vor.

Für den Index der absoluten Risikoaversion ergibt sich:

$$-\frac{u''(x,F)}{u'(x,F)} = -\frac{u''(x)}{u'(x)} - \frac{w''(F(x))}{w'(F(x))}\ f(x)$$

Positive Risikoaversion liegt vor, wenn u(x) und w(x) jeweils konkav verlaufen[25]. Der gesamte Index setzt sich hier additiv aus den bezüglich u(x) und w(x) gebildeten Einzelindizes zusammen, wobei $-w''(F(x))/w'(F(x))$ noch mit der Dichte $f(x) = F'(x)$ gewichtet wird.

4.2.3. Ratio Form

Das Präferenzfunktional ist bei der Ratio Form als Quotient zweier Nutzenerwartungswerte gegeben[26]:

$$U(F) = \frac{\int v(x)\ dF(x)}{\int w(x)\ dF(x)} = \frac{E\ v(x)}{E\ w(x)}$$

Mitunter wird auch $v(x) = u(x)\ w(x)$ gesetzt, die hier vorgeschlagene Gestalt bedeutet dann, daß bei der Bildung des Erwartungswertes die Nutzenwerte u(x) jeweils mit w(x)/(E w(x)) gewichtet werden.

Der Ratio Form ist folgende lokale Nutzenfunktion zugeordnet[27]:

$$u(x,F) = (v(x) - U(F)\ w(x))/\bar{w}$$

$$\text{mit } \bar{w} = \int w(t)\ dF(t)$$

Die stochastische Dominanz wird aufgrund einer monoton steigenden lokalen Nutzenfunktion beachtet, wenn v(x) monoton steigend, w(x) monoton fallend verläuft und U(F) bei positivem Wertebereich von v(x) und w(x) ebenfalls immer positiv ist.

Für den Index der absoluten Risikoaversion ergibt sich:

$$-\frac{u''(x,F)}{u'(x,F)} = -\frac{v''(x) - U(F)\ w''(x)}{v'(x) - U(F)\ w'(x)}$$

Damit dieser Index positiv ist und somit Risikoaversion abgebildet wird, muß zusätzlich v(x) konkav und w(x) konvex verlaufen[28].

4.2.4. Disappointment Theorie

Die Disappointment Theorie beruht auf der Idee, mit Hilfe einer Funktion D(x) die sich aus der Abweichung vom erwarteten Nutzen ergebende Freude oder Enttäuschung über die Ergebnisse zu berücksichtigen. Folgendes Präferenzfunktional wird vorgeschlagen:

$$U(F) = \int u(x) + D(u(x)-\bar{u})\ dF(x)$$

$$\text{mit } \bar{u} = \int u(t)\ dF(t)$$

Einige andere Risikokalküle sind in diesem Ansatz als Spezialfall enthalten. Bei $D(x) = a\ x^2$ wird gemäß einem Vorschlag von Allais (1953) neben dem Erwartungswert auch die Varianz des Nutzens berücksichtigt, für $D(x) = a\ x^2 + b\ x^3$ ergibt sich der Vorschlag von Hagen (1979), auch das dritte zentrale Moment zu berücksichtigen. Das von Weber (1990) S. 263 verwendete Präferenzfunktional erhält man mit $D(x) = -a\ \exp(-cx)$ und $u(x) = x$.

Der Disappointment Theorie ist folgende lokale Nutzenfunktion zugeordnet[29]:

$$u(x,F) = u(x)\ (1-\bar{D}') + D(u(x)-\bar{u})$$

$$\text{mit } \bar{D}' = \int D'(u(t)-\bar{u})\ dF(t)$$

Die stochastische Dominanz wird beachtet, wenn bei monoton steigenden Funktionen u(x) und D(x) zusätzlich $0 < D'(x) < 1$ verlangt wird, man erhält dann eine positive Ableitung der lokalen Nutzenfunktion nach x.

Für den Index der absoluten Risikoaversion ergibt sich:

$$-\frac{u''(x,F)}{u'(x,F)} = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

$$- u'(x)\,\frac{D''(u(x)-\bar{u})}{D'(u(x)-\bar{u}) + 1 - \bar{D}'}$$

Einen positiven Index und damit Risikoaversion erhält man, wenn zusätzlich zu den oben genannten Voraussetzungen u(x) und D(x) jeweils konkav verlaufen[30].

5. Zusammenfassung und Ausblick

Mit Blick auf die Anwenderpraxis ist zunächst festzuhalten, daß gegen eine Verwendung der Erwartungsnutzentheorie bei Risikoentscheidungen in diesem Beitrag keine Einwände erhoben werden. Dagegen ist ein theoretisch-normativer Standpunkt problematisch, wonach *ausschließlich* dieses Risikoentscheidungskalkül zulässig ist und mit der Erwartungsnutzentheorie nicht konforme Entscheidungen, wie sie z.B. regelmäßig in dem berühmten Beispiel von Allais (1953) getroffen werden, als fehlerhaft bzw. nicht rational anzusehen sind. Wenn die Erwartungsnutzentheorie aus empirischer Sicht nicht bestätigt werden kann, so bedeutet dies nicht, daß sich die Individuen überwiegend irrational verhalten, sondern daß ein zwar einfaches und elegantes, aber mit dem Substitutionsaxiom von einer zu strengen Prämisse ausgehendes Modell benutzt wurde. Solange keine offensichtliche Dominanzverstöße vorliegen, weil sich bei einer anderen Entscheidung in jeder Zukunftslage ein besseres Ergebnis ergeben würde, besteht auch kein Anlaß, den Individuen ein bestimmtes, mit gewissen theoretisch-normativen Konstrukten übereinstimmendes Risikoverhalten zwingend vorzuschreiben.

Um die Konsequenzen des Substitutionsaxioms herauszuarbeiten, wurde in diesem Beitrag der allgemeine mikroökonomische Ansatz der individuellen Präferenzbildung auf Risikoentscheidungen übertragen, indem in die Präferenzfunktion statt Gütermengen die den einzelnen möglichen Zukunftslagen jeweils zugeordneten Auszahlungen eingesetzt werden. Es konnte dann gezeigt werden, daß das Substitutionsaxiom eine sogenannte additiv separierbare Präferenzfunktion voraussetzt. Diese spezielle Annahme, die auch direkt in der Formel für den Erwartungsnutzen zum Ausdruck kommt, wird in der Mikroökonomie zwar gelegentlich aus Vereinfachungsgründen auch außerhalb der Risikotheorie unterstellt, dort aber nie als normativ zwingend angesehen. Es besteht daher offensichtlich kein Anlaß, bei Risikoentscheidungen den Rationalitätsbegriff derart einschränkend zu interpretieren.

Die Erwartungsnutzentheorie wurde von John von Neumann und Oskar Morgenstern vor einem halben Jahrhundert in die ökonomische Theorie eingeführt. In der anschließenden Diskussion der frühen fünfziger Jahre, die vor allem in der Econometrica geführt wurde, wurde die Problematik des bei von Neumann und Morgenstern eher implizit enthaltenen Substitutionsaxioms im Grunde bereits deutlich. Während damals aber nicht recht klar war, was an die Stelle der Erwartungsnutzentheorie treten könnte, so hat sich diese Ausgangslage in den letzten Jahren durch die Entwicklung einer Vielzahl alternativer Risikoentscheidungskalküle dramatisch verändert. Bei diesen neueren Modellen lassen wie erwähnt zumindest einige englischsprachige Autoren explizit auch eine normative Interpretation zu.

In diesem Beitrag wurde die Theorie der lokalen Nutzenfunktion von Machina (1982) hervorgehoben. Dieser Ansatz beruht auf der Idee, das Substitutionsaxiom durch eine viel weniger einschränkende Differenzierbarkeitsbedingung zu ersetzen. Für alle Verteilungen, die sich in einem mathematisch präzisen Sinne von der jetzt in die lokale Nutzenfunktion u(x,F) als zweites Argument einzusetzenden Verteilungsfunktion F(x) nicht sehr unterscheiden, kann dann das Risikoverhalten aufgrund der vorausgesetzten Differenzierbarkeit lokal durch das additiv-lineare Erwartungsnutzenmodell approximiert werden. In diesem Ansatz sind auch die meisten der in der letzten Zeit entwickelten alternativen Risikokalküle als Spezialfall enthalten, für einige Ansätze wurde die zugeordnete lokale Nutzenfunktion angegeben. Ganz analog zu einer herkömmlichen von Neumann/Morgenstern

Nutzenfunktion können dann aus dem Krümmungsverhalten Aussagen zum Grad der Risikoaversion abgeleitet werden, außerdem wird bei einer monoton steigenden lokalen Nutzenfunktion das Dominanzprinzip beachtet.

Gegenüber diesem sehr allgemeinen Ansatz sind deskriptiv orientierte Forscher wohl eher an einem genauer spezifizierten Modell interessiert, um bessere Prognosen über das tatsächliche Risikoverhalten abgeben zu können. Es könnte z.B. sein, daß im Gegensatz zur Erwartungsnutzentheorie ein anderes Risikokalkül die empirischen Beobachtungen besonders gut wiedergibt. Ein anderer Ansatz würde darin bestehen, bestimmte Hypothesen über die Gestalt der lokalen Nutzenfunktion zu formulieren. So hat Machina die typischen Verletzungen des Substitutionsaxioms dadurch zu erklären versucht, daß der Index der absoluten Risikoaversion $-u''(x,F)/u'(x,F)$ beim Übergang im zweiten Argument zu einer stochastisch dominanten Verteilung zunimmt. Diese sogenannte Hypothese II impliziert insbesondere auch das dargestellte »Fanning Out« der Indifferenzkurven in einem Dreiecksdiagramm. Bei der »Ratio Form« ist die Hypothese II erfüllt, wenn $w''(x)\, v'(x) > w'(x)\, v''(x)$ für alle x gilt, für die anderen in diesem Beitrag betrachteten Risikokalküle sind solche allgemeine Aussagen jedoch nicht möglich[31]. Neuere empirische Untersuchungen favorisieren offensichtlich keinen bestimmten deskriptiven Ansatz[32].

Schließlich stellt sich die Aufgabe, die neueren Risikokalküle in den bisher fast ausschließlich durch die Erwartungsnutzentheorie geprägten ökonomischen Modellen anzuwenden. Machina hat zwar gezeigt, daß die Methoden der Erwartungsnutzentheorie auch unter allgemeineren Voraussetzungen angewendet werden können, jedoch sind abweichende modelltheoretische Ergebnisse damit nicht grundsätzlich ausgeschlossen. Weber (1990) hat eine Erweiterung des klassischen CAPM vorgestellt, bei der die Varianz durch das allgemeinere Risikomaß $r = E \exp(c(x-\mu))$ ersetzt wird. In Rau-Bredow (1995) wird die Theorie der lokalen Nutzenfunktion auf die Principal-Agent-Theorie angewendet. Es zeigt sich, daß im first-best Fall die Bedingungen für eine optimale Risikoallokation auch dann gültig bleiben, wenn von Neumann/Morgenstern Nutzenfunktionen durch lokale Nutzenfunktionen vom Machina-Typ ersetzt werden. Dagegen erweisen sich im second-best Fall bei der Lösung von Anreizkonflikten bestimmte Modifikationen gegenüber den bisherigen Ergebnissen als erforderlich. Unabhängig davon, ob die Erwartungsnutzentheorie nur aus deskriptiver oder auch aus normativer Sicht zu kritisieren ist, ergeben sich noch viele Aufgaben für die weitere ökonomische Forschung.

Anmerkungen

[1] Vgl. etwa Eisenführ/Weber (1993) S. 319ff.; Kahneman/Tversky (1979); Machina (1982) S. 280ff.

[2] Vgl. hierzu Monissen/Huber (1992); von Nitzsch (1992); Scheffen (1993); Schneider (1984) und Siegel (1985).

[3] Ein anderes Problem ist das Verhältnis von kardinaler Höhen- und Risikopräferenz bei der Erwartungsnutzentheorie, vgl. Kürsten (1992a), (1992b), Schildbach (1992), Schott (1993) und Dyckhoff (1993). Für diesen Beitrag ist diese Diskussion deshalb ohne Bedeutung, weil nur eine ordinale, aber keine kardinale Risikopräferenzordnung vorausgesetzt wird.

[4] Dies wird z.B. von Dieter Schneider besonders betont, vgl. etwa Schneider (1993) S. 10f.

[5] Vgl. z.B. Kahneman/Tversky (1979) S. 271ff.; Machina (1987) S. 141ff.

[6] Zu Ambiguitätseffekten vgl. Camerer/Weber (1992); Sarin/Winkler (1992) und Segal (1987a).

[7] Die MaxiMin Regel kann auch als Entscheidungsregel bei Risiko mit unendlicher Risikoaversion interpretiert werden, vgl. Bamberg/Spremann (1981).

[8] Zum »Preference Reversal« vgl. Slovic/Lichtenstein (1968), (1983) und Tversky/Slovic/Kahneman (1990). Zu nichttransitiven Präferenzen vgl. auch Fischburn (1991).

[9] Vgl. Debreu (1976) S.70, wenn die Alternativen als Elemente von $\mathbb{R}^n$ interpretiert werden können, und Fishburn (1970) S. 26ff. allgemeiner für den nicht-diskreten Fall. Die Lexikographische Ordnung ist z.B. nicht ordnungsdicht, die Handlungsalternativen können dann also nicht durch reelle Zahlen bewertet werden. Dabei gilt $(a_1, a_2) > (b_1, b_2)$ für $a_1 > b_1$ und bei $a_1 = b_1$ für $a_2 > b_2$, d.h. nur bei Gleichheit beim Primärziel wird auf das Sekundärziel zurückgegriffen. Man betrachte $c_n \to 1$ mit $c_n < 1$ für alle n, dann gilt $(c_n, 2) \prec (1,1)$ für alle n und zugleich $(c_n, 2) \to (1,2) > (1,1)$.

[10] Vgl. Herstein/Milnor (1953); Schneeweiß (1967) S. 76 und Sinn (1989) S. 81ff.